

РАДИОФИЗИКА

УДК 517.958:621.372.823

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ПЛОСКОГО ГРАДИЕНТНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА С ИМПЕДАНСНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. В. Конпенко, В. П. Моденов

(кафедра математики)

Ортогональным методом Галеркина проведен расчет постоянных распространения электромагнитных волн плоского волновода с импедансной границей и с переменным диэлектрическим заполнением. Показана эффективность метода путем сравнения с решением дисперсионного уравнения.

Постоянная распространения является одной из важнейших характеристик волноведущих электродинамических устройств. Поэтому разработке методов ее расчета уделяется повышенное внимание. В основе многих методов лежит решение трансцендентного уравнения, что для сложных волноведущих систем связано с определенными трудностями. Поэтому весьма перспективным оказывается использование различных проекционных методов [1, 2]. В настоящей работе применяется ортогональный метод Галеркина [3], в котором используется разложение по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля с несамосопряженным граничным условием третьего рода и вычисление соответствующих собственных значений дифференциально-параметрическим методом [4, 5].

Рассмотрим плоский волновод, ограниченный двумя параллельными плоскостями $x = 0$ и $x = a$. Плоскость $x = 0$ считаем идеально проводящей, а плоскость $x = a$ — сверхпроводящей, определяемой поверхностным импедансом Z_s . Ось z направим в направлении распространения волны.

Заполнение внутри волновода считаем однородным вдоль оси z и характеризующимся диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x)$, которая в общем случае является комплекснозначной функцией. Поля периодически меняются со временем по закону $e^{-i\omega t}$.

Рассмотрим случай H -волн. Выражая компоненты векторов электромагнитного поля через компоненту $E_y(x, z) = u(x, z)$, приходим к скалярной задаче.

Краевая задача заключается в нахождении решения уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом

$$\Delta u(x, z) + k^2 \varepsilon(x) u(x, z) = 0$$

в полосе ($0 < x < a$, $-\infty < z < +\infty$), для которого заданы граничное условие первого рода на нижней границе полосы:

$$u \Big|_{x=0} = 0$$

и несамосопряженное условие третьего рода на верхней границе этой полосы:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + u \Big|_{x=a} = 0,$$

где $\alpha = iZ_s/k$ — приведенный импеданс, $|\alpha| \ll 1$.

Решение данной задачи проводится ортогональным методом Галеркина. Приближенное решение ищется в виде конечного разложения

$$u^N(x, z) = \sum_{n=1}^N C_n e^{i\gamma_n z} X_n(x),$$

где C_n — неизвестные коэффициенты, γ_n — искомые постоянные распространения, X_n — собственные функции задачи Штурма–Лиувилля со слабо несамосопряженным ($|\alpha| \ll 1$) граничным условием третьего рода:

$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n^2 X_n(x) = 0, & x \in (0, a), \\ X_n(0) = 0, & \alpha X_n'(a) + X_n(a) = 0 \quad (\operatorname{Re} \alpha > 0), \end{cases}$$

λ_n — собственные значения.

При условии $|\alpha| \ll 1$ спектр собственных значений невырожден. Комплекснозначные собственные функции $X_n(x) = \sin \lambda_n x$ ортогональны в комплексном пространстве $L_2(0, a)$ с псевдоскалярным произведением и образуют базис [4], квадрат псевдонормы отличен от нуля и равен $\|X_n\|^2 = \frac{a(1+\alpha+\alpha^2\lambda_n^2)}{2(1+\alpha^2\lambda_n^2)}$.

Для нахождения собственных значений, используя дифференциально-параметрический метод (ДП-метод [5]), приходим к задаче Коши:

$$\frac{d\lambda_n}{d\alpha} = -\frac{\lambda_n}{1 + \alpha + \alpha^2 \lambda_n^2}, \quad \lambda_n \Big|_{\alpha=0} = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При $|\alpha| \ll 1$, разлагая собственные значения λ_n в окрестности $\alpha = 0$, получаем для них приближенные аналитические выражения:

$$\lambda_n \cong \lambda_n \Big|_{\alpha=0} + \frac{d\lambda_n}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \cdot \alpha = \frac{n\pi}{a} \left(1 - \frac{\alpha}{a}\right).$$

Далее, для того чтобы $u^N(x, z)$ было приближенным решением рассматриваемой краевой задачи, необходимо выполнение соотношения

$$\int_0^a (\Delta u + k^2 \varepsilon(x)u) X_m(x) dx = 0.$$

В силу ортогональности собственных функций

$$-\gamma_m^2 C_m = \sum_{n=1}^N \left(\lambda_m^2 \delta_{mn} - \frac{k^2}{\|X_m\|^2} \int_0^a \varepsilon(x) X_n(x) X_m(x) dx \right) C_n = 0.$$

Таким образом, для расчета постоянных распространения получена задача на собственные значения:

$$\Lambda C = AC,$$

где C — столбец неопределенных коэффициентов размерности N , A — заданная матрица размером $N \times N$, а $\Lambda = -\gamma^2$ — столбец искоемых собственных значений.

В случае слоистого заполнения (однородный слой с диэлектрической проницаемостью ε_1 , заполняющий волновод вдоль оси x от 0 до d) проводилось сравнение с решением дисперсионного уравнения.

Дисперсионное уравнение записывалось в виде равенства нулю определителя третьего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha \nu \cos \nu a + \sin \nu a & -\alpha \nu \sin \nu a + \cos \nu a & 0 \\ \nu \cos \nu d & -\nu \sin \nu d & -\omega \cos \omega d \\ \sin \nu d & \cos \nu d & -\sin \omega d \end{vmatrix} = 0,$$

где $\nu = \sqrt{k^2 \varepsilon_0 - \gamma^2}$, $\omega = \sqrt{k^2 \varepsilon_1 - \gamma^2}$.

Данное дисперсионное уравнение решалось итерационным методом Ньютона–Рафсона. На первом шаге рассматривалось начальное приближение для

пустого волновода: $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, задавался шаг $\Delta \varepsilon$ и осуществлялся поиск решения γ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon$, причем в качестве начального приближения использовались постоянные распространения для пустого волновода ($\gamma_n = \sqrt{k^2 \varepsilon_0 - \lambda_n^2}$). Если выполнялось условие сходимости метода, на следующем шаге рассматривалось приближение $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + 2\Delta \varepsilon$ и в качестве начального приближения использовалось решение на предыдущем шаге. В противном случае шаг по ε_1 уменьшался. Далее процедура последовательно продолжалась.

Численное сравнение двух методов проводилось для волновода ($a = 15$ мм) со слоем из поликора ($\varepsilon = 9,6$, $d = 0,2$ мм) и импедансной стенкой из сверхпроводника YBCO (импеданс $Z_s = 0,004 + 0,003i$ Ом на частоте $f = 10$ ГГц).

В табл. 1 приведены значения постоянных распространения при данных параметрах волновода, вычисленные ортогональным методом Галеркина и полученные путем решения дисперсионного уравнения. Наблюдается совпадение результатов с высокой точностью.

Т а б л и ц а 1

Постоянные распространения	Метод Ньютона	Метод Галеркина
γ_1	$1,0181 + 1,0071 \cdot 10^{-5}i$	$1,0215 + 1,0015 \cdot 10^{-5}i$
γ_2	$1,5038 \cdot 10^{-5} + 3,1802i$	$1,5042 \cdot 10^{-5} + 3,1778i$
γ_3	$2,1582 \cdot 10^{-5} + 5,5127i$	$2,1590 \cdot 10^{-5} + 5,5112i$

В табл. 2 приведены значения постоянных распространения, вычисленные при различных значениях N ($d = 1$ мм).

Таким образом, численный эксперимент показал как хорошую внутреннюю сходимость ортогонального метода Галеркина, так и совпадение с высокой точностью полученных этим методом численных результатов с решением дисперсионного уравнения. Это позволяет сделать вывод о возможности эффективного использования ортогонального метода Галеркина для расчета импедансных волноводов с диэлектрическим или иным заполнением.

Т а б л и ц а 2

N	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
5	$5,9021 + 1,0247 \cdot 10^{-7}i$	$3,7438 + 1,5848 \cdot 10^{-6}i$	$1,8061 \cdot 10^{-5} + 3,7867i$	$3,3932 \cdot 10^{-5} + 6,4134i$
10	$5,9045 + 5,4978 \cdot 10^{-8}i$	$3,7619 + 1,3304 \cdot 10^{-6}i$	$1,8130 \cdot 10^{-5} + 3,7547i$	$3,4033 \cdot 10^{-5} + 6,4077i$
15	$5,9048 + 6,7280 \cdot 10^{-8}i$	$3,7636 + 1,4073 \cdot 10^{-6}i$	$1,8195 \cdot 10^{-5} + 3,7532i$	$3,4053 \cdot 10^{-5} + 6,4072i$
20	$5,9048 + 6,8081 \cdot 10^{-8}i$	$3,7639 + 1,4091 \cdot 10^{-6}i$	$1,8187 \cdot 10^{-5} + 3,7529i$	$3,4057 \cdot 10^{-5} + 6,4074i$

Литература

1. Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М: Наука, 1967.
2. Моденов В.П. // Вычислительные методы и программирование. Вып. XX. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. С. 50.
3. Моденов В.П. // ЖВМ и МФ. 1987. 27, №1. С. 144.

4. Modenov V.P. // Proc. Intern. Simp. «Physics and Engineering of Millimetre and Submillimetre Waves». Vol. I. Kharkov, 1994. P. 98.
5. Моденов В.П. // ДАН СССР. 1987. 296, №3. С. 536.

Поступила в редакцию 27.10.99