

УДК 539.12.01

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ДВИЖЕНИЯ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ САЗЕРЛЕНДА–КАЛОДЖЕРО ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Д. В. Мещеряков, В. Б. Тверской

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Рассмотрена трехчастичная система Сазерленда–Калоджеро во внешнем поле. Предложен рецепт упорядочения некоммутирующих переменных в интегралах движения. Интегралы движения найдены в явном виде.

Введение

Со времени открытия первой вполне интегрируемой квантовой модели многих частиц, расположенных на прямой, исследование подобных задач вызывает неослабевающий интерес [1–7]. Термин «вполне интегрируемая система» понимается здесь и в дальнейшем в смысле Лиувилля, т.е. вполне интегрируемая система обладает глобальными интегралами движения, находящимися в инволюции, в количестве, равном числу степеней свободы системы. В классическом случае инволютивность означает равенство нулю скобок Пуассона, а в квантовом — коммутативность интегралов движения.

Среди нерешенных проблем остается доказательство того факта, что квантовые обобщения вполне интегрируемых классических систем также являются вполне интегрируемыми. Для некоторых систем с достаточно простой структурой матриц Лакса такое доказательство было найдено Калоджеро [3]. Ольшанецкий и Переломов доказали, что весьма общий класс квантовых систем, связанных с полупростыми алгебрами Ли, является вполне интегрируемым [4]. Однако для более общих систем N частиц на прямой во внешнем поле разработанные методы неприменимы. К таким системам относится модель Сазерленда–Калоджеро во внешнем поле. Ее гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2} + W(x_i) \right) + \sum_{i>j}^N V(x_i - x_j) \quad (1)$$

и описывает N взаимодействующих посредством парного потенциала

$$V(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1)a^2}{\text{sh}^2(ax)} \quad (2)$$

частиц единичной массы, находящихся во внешнем поле

$$W(x) = \frac{1}{4}b^2 \text{ch}(4ax) - ab[1 + \alpha(N - 1)] \text{ch}(2ax), \quad (3)$$

где a, b, α — произвольные константы, определяющие потенциалы. Классическая система (1)–(3) вполне интегрируема. Этот факт был доказан Иноземце-

вым [5]. Матрица Лакса, приводящая к потенциалам (2), (3), имеет следующие матричные элементы:

$$L_{11} = l, \quad L_{12} = m, \quad L_{21} = n, \quad L_{22} = -l, \quad (4)$$

где l, n, m — матрицы размером $N \times N$:

$$\begin{aligned} l_{jn} &= p_j \delta_{jn} + i(1 - \delta_{jn})R_{jn}, \\ m_{jn} &= \delta_{jn}m(x_n), \quad n_{jn} = \delta_{jn}m(x_n + \delta), \\ R_{jn} &= R(x_j - x_n), \quad j, n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Здесь δ — произвольная константа, а функции $R_{jn}, m(x_j), n(x_j)$ определяют потенциалы (2), (3):

$$V(x_j - x_n) = R_{jn}^2 + \text{const}, \quad W(x_j) = \frac{1}{2}m(x_j)n(x_j).$$

Для того чтобы система (1) с потенциалами V, W была вполне интегрируемой, функции m, n, R должны удовлетворять следующим функциональным уравнениям (штрих обозначает производную по аргументу) [6]:

$$\begin{aligned} [m'(x_j) - m'(x_k)]R_{jk} &= -2R'_{jk}[m(x_j) - m(x_k)], \\ [n'(x_j) - n'(x_k)]R_{jk} &= -2R'_{jk}[n(x_j) - n(x_k)]. \end{aligned} \quad (5)$$

В работе [7] было доказано, что квантовая система двух частиц ($N = 2$) является вполне интегрируемой. Здесь мы покажем, что система трех частиц также вполне интегрируема, и приведем явный вид интегралов движения.

Интегралы движения в классическом случае определяются как симметризованные функции собственных значений матрицы Лакса L и могут быть найдены по формуле

$$I_n = \frac{1}{2n} \text{tr} L^{2n}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Это выражение наиболее удобно для нахождения интегралов движения и в квантовом случае. Из (4) видно, что интегралы I_n содержат произведения некоммутирующих сомножителей, и поэтому для определения квантовых интегралов движения в (6) необходимо выбрать рецепт упорядочения. Найденный в [7] рецепт упорядочения для случая $N = 2$ может быть обобщен следующим образом: в качестве интеграла движения следует брать эрмитову часть I_n , т.е.

$$I_n \rightarrow \frac{I_n + I_n^+}{2}.$$

Для $N = 3$ матрица L имеет размер 6×6 , поэтому вычисления проводились на компьютере с использованием системы аналитических вычислений REDUCE. Для вычислений с некоммутирующими переменными использовался пакет NCMP, разработанный для операций с некоммутирующими переменными в системе REDUCE [8]. Для ускорения вычислений каждый коммутатор был разбит на несколько более простых и быстрых для вычисления коммутаторов. Сумма всех членов, содержащих в качестве множителей функции $m(x_j)$, $n(x_j)$, оказалась равной нулю вследствие функциональных соотношений (5). Оставшаяся часть коммутаторов представляет собой полином по импульсам частиц и равна нулю в силу соотношений

$$[p_i + p_j, R_{ij}] = 0, \quad i \neq j = 1, 2, 3,$$

т. е. вследствие антисимметрии функции R_{ij} относительно перестановок координат частиц. В результате получаем

$$[I_i, I_j] = 0, \quad i < j = 1, 2, 3,$$

т. е. квантовая система (1)–(3) в случае $N = 3$ является вполне интегрируемой. Интеграл движения I_1 совпадает с гамильтонианом (1), а остальные два интеграла движения в частном случае $m(x) = n(x) = \gamma \operatorname{ch}(2ax) + \mu$, где γ и μ — произвольные константы, имеют вид

$$I_2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{p_i^4}{2} + \sum_{k \neq i}^3 \left[\{p_i^2, R_{ki}^2\} + 2m(x_i)^2 R_{ik}^2 + \{p_i p_k, R_{ki}^2\} + R_{ik}^2 R_{ki}^2 + 2m(x_i)^2 p_k^2 + 2m(x_i) m(x_k) R_{ik}^2 + 2R_{ik}^4 \right] + \frac{m(x_i)^4}{2} \right),$$

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 533.9

ДВУХПОТОКОВАЯ ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В АТОМАРНЫХ СРЕДАХ

В. К. Гришин

(НИИЯФ)

Показывается, что потоки быстрых атомов или сложных ионов за счет аномальных доплеровских переходов на медленных волнах в нейтральном газе могут быть нестабильными и служить источником индуцированного высокочастотного излучения. Оцениваются возможные параметры подобных физических систем.

Атомарный поток с электродинамической точки зрения — это поток электронных осцилляторов, которые благодаря аномальному эффекту Доплера даже в невозбужденном состоянии могут быть источником индуцированного излучения. Излучение фотонов

$$I_3 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{p_i^6}{2} + \sum_{k \neq i}^3 \left[\{p_i^4, R_{ki}^2\} + \{p_i^2, R_{ki}^4\} + 2\{p_i^3 p_k, R_{ki}^2\} + 2\{p_i p_k, R_{ki}^4\} + 4m(x_i)^3 m(x_k) R_{ik}^2 + \frac{1}{3} R_{ik}^6 \right] + \sum_{k, l \neq i} \left[\{p_i^2, R_{ik}^2 R_{il}^2\} + \{p_i p_k, R_{ik}^2 R_{il}^2\} + R_{ik}^2 R_{il}^2 \sum_{m \neq i} R_{im}^2 + 2m(x_i)^2 R_{kl}^4 + 2m(x_i)^4 R_{kl}^2 + 2m(x_k) m(x_l) R_{ki}^2 R_{il}^2 + 2m(x_k) m(x_l) p_i^2 R_{kl}^2 + 2m(x_i)^2 p_l^2 p_k^2 + 2m(x_k)^2 m(x_l)^2 p_i^2 \right] + \frac{1}{3} m(x_i)^6 \right),$$

где фигурными скобками обозначен антикоммутатор.

Проблема аналитического доказательства полной интегрируемости системы (1)–(3) при произвольных N остается открытой. Предложенный в данной работе рецепт упорядочения некоммутирующих переменных в I_n может быть использован при проведении общего доказательства.

Литература

1. Dittrich J., Inozemtsev V.I. // J. Phys. A. 1993. **20**. P. 753.
2. Мецзяков Д.В., Тверской В.Б. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 1. С. 56 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 1. P. 66).
3. Calogero F. // Lett. Nuovo Cimento. 1975. **13**. P. 507.
4. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. // Phys. Reports. 1983. **94**. P. 312.
5. Inozemtsev V.I. // Phys. Scripta. 1984. **25**. P. 517.
6. Inozemtsev V.I. // Phys. Lett. 1983. **A98**, No. 7. P. 316.
7. Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V. // Phys. Lett. 1984. **A106**, No. 3. P. 101.
8. Rodionov A.Ya. // SIGSAM Bull. 1984. No. 3. P. 16.

Поступила в редакцию
10.01.00