

## АСТРОНОМИЯ

УДК 530.12

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА  
С ТОКОВОЙ ШТАНГОЙ ПО ПОЛЯРНОЙ ОРБИТЕ  
В ГРАВИТАЦИОННОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ ЗЕМЛИ

В. И. Денисов, В. Б. Пинц

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Найдено точное решение нелинейных уравнений, описывающих движение космического аппарата под действием сил Ампера и сил гравитационного поля при частном законе управления элементом тока.

Работы по созданию электродинамических тросовых систем, одним из назначений которых является управление орбитальным движением космических аппаратов, получают все большее развитие [1]. Такие системы представляют собой гибкие линейные проводники с током, замыкание которого осуществляется через ионосферу с помощью специальных концевых плазменных устройств. В результате взаимодействия тока в проводнике с дипольным магнитным полем Земли возникает сила Ампера, которая является силой тяги для космического аппарата.

Однако, на наш взгляд, для указанной цели наиболее перспективно использование не гибких, а жестких проводников с током, например токовой штанги. В этом случае величиной и направлением силы Ампера легко управлять, изменяя силу тока и ориентацию штанги в пространстве по любому заданному закону.

Задача о движении космического аппарата в гравитационном поле Земли под действием силы Ампера чрезвычайно интересна в теоретическом плане, так как соответствующие уравнения движения не являются лагранжевыми [2]. Общие методы интегрирования, разработанные для систем таких уравнений [3], оказываются неприменимыми. Поэтому возникает задача исследования тех частных случаев, в которых эти уравнения имеют точные решения.

Рассмотрим векторное уравнение движения космического аппарата:

$$M_1 \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_1 M_2 \mathbf{r}}{r^3} + \frac{l}{c} [\mathbf{I} \times \mathbf{B}], \quad (1)$$

где  $G$  — постоянная тяготения,  $M_1$  — масса космического аппарата,  $M_2$  — масса Земли,  $l$  — длина токовой штанги,  $\mathbf{I}$  — вектор тока в штанге,  $c$  — скорость света.

Магнитное поле Земли с большой точностью является дипольным, поэтому  $\mathbf{B} = [3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m}] / r^5$ , где  $\mathbf{m}$  — вектор магнитного дипольного момента.

Как известно [3], задачи о движении в поле магнитного диполя чрезвычайно сложны. В частности, даже лагранжевы уравнения, описывающие движение заряженной частицы в поле магнитного диполя, до сих пор не удалось проинтегрировать в общем

виде. Поэтому и в нашей более сложной задаче мы рассмотрим только полярные орбиты, в плоскости которых лежит магнитный дипольный момент Земли  $\mathbf{m}$ .

Предположим, что токовая штанга всегда перпендикулярна плоскости орбиты космического аппарата. В этом случае плоскость орбиты не будет вращаться и поворотом системы координат ее можно совместить с плоскостью  $XOY$  геоцентрической системы координат и направить ось  $X$  вдоль вектора магнитного дипольного момента.

Умножая уравнения (1) скалярно на вектор скорости  $\mathbf{v}$ , получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{M_1 v^2}{2} - \frac{GM_1 M_2}{r} \right) = \frac{lmI(\varphi)}{cr^3} (2r\dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{r} \sin \varphi), \quad (2)$$

где  $\varphi$  — полярный угол, отсчитываемый от положительного направления оси  $X$ . Уравнение моментов можно найти, если уравнение (1) умножить векторно на  $\mathbf{r}$ :

$$\frac{d}{dt} (M_1 r^2 \dot{\varphi}) = \frac{2lmI(\varphi)}{cr^2} \cos \varphi. \quad (3)$$

Из этого уравнения следует, что в рассматриваемой нами задаче ни энергия космического аппарата, ни его момент импульса не сохраняются. Однако мы можем найти точное решение уравнения (3), если подберем способ управления током  $I = I(\varphi)$ , позволяющий получить из выражения (2) не закон сохранения, а первый интеграл.

Правая часть выражения (3) будет представлять собой субстанциальную производную по времени [3] только при  $I(\varphi) = I_0 \sin^3 \varphi$ . Тогда из уравнения (2) будем иметь

$$\frac{M_1 v^2}{2} - \frac{GM_1 M_2}{r} - \frac{lmI_0}{cr^2} \sin^3 \varphi = M_1 E_0, \quad (4)$$

где  $E_0$  — константа интегрирования.

Уравнение моментов в этом случае дает еще один первый интеграл:

$$r^4 \dot{\varphi}^2 = L_0 + \frac{lmI_0}{M_1 c} \sin^4 \varphi, \quad (5)$$

где  $L_0$  — константа интегрирования.

Комбинируя уравнения (4) и (5), получим

$$\dot{r}^2 + \frac{L_0}{r^2} - \frac{2GM_2}{r} - 2E_0 = 0.$$

Отсюда легко найти закон движения космического аппарата в форме зависимости времени движения  $t$  от радиуса  $r$ :

$$t = t_0 + \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{2E_0 r^2 - L_0 + 2GM_2 r}}.$$

Уравнение траектории можно получить, если из выражений (4) и (5) построить аналог первой формулы Бине. Для этого введем обозначения:  $u = 1/r$ ,  $\eta(\varphi) = u - GM_2/L_0$  и  $C_0 = -G^2 M_2^2/L_0^2 - 2E_0/L_0$ , после чего будем иметь

$$\left[ L_0 + \frac{lmI_0}{cM_1} \sin^4 \varphi \right] \eta'^2 + L_0[\eta^2 + C_0] = 0, \quad (6)$$

где штрих обозначает производную по  $\varphi$ .

Поскольку константы  $E_0$  и  $L_0$  определяются начальными условиями, то постоянная  $C_0$  является законечноопределенной величиной. При этом возможны три различных решения этого уравнения.

При  $C_0 < 0$  решение имеет вид

$$\frac{1}{r} = \frac{GM_2}{L_0} + \sqrt{|C_0|} \cos \left\{ \alpha_0 \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{lmI_0}{cM_1 L_0} \sin^4 \varphi}} \right\},$$

где  $\alpha_0 = \arccos [(1/r_0 - GM_2/L_0)/\sqrt{|C_0|}]$ .

При  $C_0 = 0$  вещественное решение уравнения (6) возможно только при  $|mlI_0 \sin^4 \varphi / (cM_1 L_0)| > 1$ :

$$\frac{1}{r} = \frac{GM_2}{L_0} + \eta_0 \exp \left\{ \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left| \frac{lmI_0}{cM_1 L_0} \right| \sin^4 \varphi - 1}} \right\},$$

где  $\eta_0 = 1/r_0 - GM_2/L_0$ .

И, наконец, при  $C_0 > 0$  и  $|mlI_0 \sin^4 \varphi / (cM_1 L_0)| > 1$

$$\frac{1}{r} = \frac{GM_2}{L_0} + \sqrt{|C_0|} \operatorname{sh} \left\{ \alpha_0 \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left| \frac{lmI_0}{cM_1 L_0} \right| \sin^4 \varphi - 1}} \right\},$$

где  $\alpha_0 = \operatorname{arsh} [(1/r_0 - GM_2/L_0)/\sqrt{C_0}]$ .

Таким образом, действие силы Ампера на космический аппарат, в конструкцию которого включена жесткая штанга с током, существенно изменяет вид полярной траектории в гравитационном поле Земли, что может найти применение в проектировании космических полетов.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 98-02-17448а).

#### Литература

1. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990; Денисов В.И., Денисова И.П., Пинчук В.Б. Препринт НИИЯФ № 2000-8/612. М., 2000.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
3. Петкевич В.В. Теоретическая механика. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию  
10.11.99