

УДК 539.12.01

## О ЯВНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛНОСТЬЮ ИНТЕГРИРУЕМЫХ КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЧЕТЫРЕХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Д. В. Мещеряков, В. Б. Тверской

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Найдены явные решения уравнений движения для одного класса полностью интегрируемых систем четырех частиц во внешнем поле. Получено соотношение, связывающее начальные условия, константу взаимодействия и время падения двух частиц в сингулярность потенциала взаимодействия.

К настоящему времени различные методы решения уравнений движения в явном виде были найдены для многих полностью интегрируемых систем [1–4]. В работе [5] мы использовали разработанный ранее [6] метод решения уравнений движения в явном виде для класса полностью интегрируемых систем  $N$  частиц с равными массами  $m = 1$ , расположенных на прямой и попарно взаимодействующих во внешнем поле. С помощью этого метода мы нашли явные решения уравнений движения для класса систем трех частиц. В настоящей работе этот метод применяется для системы четырех частиц. На основе найденных решений получены оценки времени падения частиц на центр для различных начальных условий.

Системы рассматриваемого класса обладают парой Лакса и как следствие  $N$ -интегралами движения, которые являются полиномами по степеням импульсов и координат взаимодействующих частиц. Один из этих интегралов движения представляет собой гамильтониан системы:

$$H = \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_i^2}{2} + W(x_i) \right) + \sum_{i>j}^N V(x_i - x_j). \quad (1)$$

Для того чтобы система обладала свойством полной интегрируемости, потенциалы внешнего поля  $W(x)$  и парного взаимодействия  $V(x)$  должны иметь следующий вид:

$$V(x) = \frac{a}{x^2}, \quad W(x) = \gamma_1 x^4 + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x, \quad (2)$$

где  $a, \gamma_i, i = 1, 2, 3$ , — произвольные константы.

В работе [6] уравнения движения системы  $N$  частиц с гамильтонианом (1) и потенциалами (2) сведены к неоднородному уравнению Бюргерса–Хопфа. С помощью этой процедуры были найдены решения уравнений движения для системы (1)–(2). При выполнении следующих условий:

$$a = -A^2, \quad \gamma_1 = -\frac{\alpha^2}{2}, \quad \gamma_2 = -\alpha\beta, \quad \gamma_3 = -\alpha A(N-1), \quad (3)$$

где  $A, \alpha, \beta$  — произвольные константы, координаты  $N$  частиц являются нулями функции

$$\phi(x, t) = \sum_{k=0}^N x^k [\exp(t\hat{T})\mathbf{c}(0)]_k, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{T}_{00} &= -\beta, & \hat{T}_{02} &= -a, \\ \hat{T}_{N-1N} &= -N\beta, & \hat{T}_{N-1N-2} &= 2\alpha, & \hat{T}_{NN-1} &= \alpha, \\ \hat{T}_{kk-1} &= (N+1-k)\alpha, & \hat{T}_{kk+1} &= -(k+1)\beta, \\ \hat{T}_{kk+2} &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}a, & 1 \leq k \leq N-2, & (5) \\ c_{N-k}(0) &= (-1)^k \sum_{1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_k \leq N} x_{\lambda_1}(0) \dots x_{\lambda_k}(0), \\ c_N(0) &= 1. \end{aligned}$$

Остальные элементы матрицы  $\hat{T}$  равны нулю. В этих выражениях  $x_i(0), i = 1, \dots, N$ , — начальные координаты  $N$  частиц.

Применим разработанный метод [6] для нахождения явных решений уравнений движения для следующего класса систем полностью интегрируемых систем частиц во внешнем поле. Рассмотрим системы частиц вида (1) с потенциалами (2) при ограничениях (3). Наложим дополнительные условия:

$$\beta = 0, \quad \alpha = -A^2. \quad (6)$$

Таким образом, имеется только один параметр в потенциалах  $V(x), W(x)$ . Получим и проанализируем явные решения уравнений движения для четырех частиц с гамильтонианом (1) и потенциалами (2) при ограничениях (3) и (6).

Для  $N = 4$  из (4)–(5) получаем  $\hat{T}^5 = 18a^3\hat{T}^2$ , где  $E$  — единичная матрица. В этом случае ряд в (4) можно просуммировать, и координаты четырех частиц даются четырьмя действительными решениями уравнения

$$\phi(x, t) = 0. \quad (7)$$

При этом уравнение (7) имеет следующий вид:

$$\sum_{k=0}^2 x^k S_k(\theta) \bar{T}^k \mathbf{c}(0) = 0,$$

где  $a\bar{T} = \hat{T}$ ,  $\theta = -at(2)^{1/3}$ ,

$$S_0(\theta) = 1, \quad S_1(\theta) = \frac{\theta}{18^{1/3}},$$

$$S_2(\theta) = \frac{1}{54}(e^\theta - 2e^{-\theta/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta - \frac{\pi}{3})),$$

$$S_3(\theta) = \frac{1}{54}(e^\theta + 2e^{-\theta/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta) - 3), \quad (8)$$

$$S_4(\theta) = \frac{1}{54 \cdot 18^{1/3}}(e^\theta - 2e^{-\theta/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta + \frac{\pi}{3}) - 3\theta).$$

Таким образом, координаты четырех частиц в любой момент времени определяются действительными решениями уравнения

$$\sum_{k=0}^4 R_k x^k = 0. \quad (9)$$

Для начальных условий вида  $x_1(0) = -2x_0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = x_0$ ,  $x_4(0) = 2x_0$  коэффициенты в (9) имеют вид

$$R_0 = 24x_0^3 S_3 - 8x_0^2 S_2 - x_0(S_1 + 30S_4) + (1 + 12S_3),$$

$$R_1 = 24x_0^3 S_2 - 8x_0^2(S_1 + 18S_4) - x_0(1 + 30S_3) + 12S_2,$$

$$R_2 = 4x_0^3(3S_1 + 54S_4) - 4x_0^2(1 + 18S_3) - 15x_0 S_2 + (6S_1 + 108S_4),$$

$$R_3 = 4x_0^3(1 + 6S_3) - 8x_0^2 S_2 - 3x_0(S_1 + 10S_4) + 12S_3,$$

$$R_4 = -12x_0^3 S_2 + 4x_0^2(S_1 + 18S_4) + 15x_0 S_3 - 6S_2.$$

При  $t \rightarrow \infty$  асимптотическая форма (9) есть

$$x^4 + 18^{1/3}x^3 + \frac{3}{2}12^{1/3}x^2 + x - \frac{1}{2}18^{1/3} = 0.$$

Это уравнение имеет только два действительных решения. Отсюда следует, что частицы падают в сингулярность за конечное время  $t_0$  при любых значениях  $x_0$ . При произвольных  $x_i(0)$ , приводя уравнение (9) к виду  $x^4 + ux^2 + qx + r = 0$  и пользуясь выражением для дискриминанта в общем случае [7]:  $D = 16u^4r - 4u^3q^2 - 128u^2q^2 + 144uq^2r - 27q^2 + 256r^3$ , получаем оценку сверху для  $t_0$ :

$$t_0 = \frac{18^{1/3}}{4A^2} \frac{\sum_{\substack{k,l=1 \\ (k<l)}}^4 x_k^2(0)x_l^2(0)}{\sum_{k=1}^4 x_k^2(0)}. \quad (10)$$

Из выражения (10) следует, что при уменьшении константы связи  $A^2$  время падения в сингулярность увеличивается.

При  $N > 4$  получить аналогичные оценки пока не удалось. При  $N = 5$  из (4)–(5) получаем

$$\hat{R}^6 = \hat{R}^3 + kE,$$

где  $\hat{R} = \frac{1}{2 \cdot 9^{1/3}}\hat{T}$  и  $k = (5/2)^2 3^{-4}$ . При этом имеем:

$$S_0(\theta) = 1 + \frac{k\theta^6}{6!} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_l \theta^{9+3l}}{(9+3l)!},$$

где

$$a_l = k \sum_{m=0}^{l-3} \frac{(l+m)!}{(l-1)!m!} k^m.$$

Суммирование рядов в (4) в этом случае, вероятно, приведет к  $\theta$ -функциям.

Полученные явные решения уравнений движения могут быть использованы для проверки различных приближенных методов, а также в качестве нулевого приближения при исследовании близких к рассмотренным неинтегрируемых систем частиц.

Авторы выражают сердечную благодарность В. И. Иноземцеву за полезные обсуждения.

#### Литература

1. Calogero F. // Lett. Nuovo Cim. 1975. **13**. P. 507; Moser J. // Adv. Math. 1975. **16**. P. 197.
2. Dittrich J., Inozemtsev V.I. // J. Phys. 1993. **A20**. P. 753.
3. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. // Phys. Rep. 1983. **94**. P. 312.
4. Grosse H. // Acta Phys. Austr. 1980. **52**. P. 101.
5. Мецерыков Д.В., Тверской В.Б. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. №1. С. 56 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 1. P. 66).
6. Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V. // Phys. Lett. 1984. **A106**. P. 101.
7. Feferman S. // The Number Systems. Foundation of Algebra and Analysis. Reading: Addison-Wesley, 1964.

Поступила в редакцию  
10.01.00