

УДК 523.165

СТРУКТУРА АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О МОДУЛЯЦИИ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В ГЕЛИОСФЕРЕ

А. А. Суслов, Б. Ю. Юшков

(НИИЯФ)

В предположении сферически-симметричной стационарной модели гелиосферы найдена структура аналитического решения уравнения Фоккера–Планка, описывающего модуляцию космических лучей в гелиосфере. В общем виде задача решения уравнения в частных производных второго порядка сводится к нахождению корней нелинейных алгебраических уравнений и вычислению определенных интегралов от непрерывных функций. Впервые решение получено для произвольной формы спектра космических лучей на границе области модуляции и для произвольной энергетической зависимости коэффициента диффузии.

Постановка задачи

Аналитические решения уравнения Фоккера–Планка для модуляции космических лучей (КЛ) в гелиосфере были получены несколькими авторами [1–4] при упрощенных предположениях, не соответствующих реальным условиям: либо первичный спектр КЛ принимался в «чисто» степенной форме, либо делались специальные предположения об энергетической зависимости коэффициента диффузии (КД). В работе [5] был предложен новый метод решения задачи о модуляции КЛ в сферически-симметричной модели, сводящий задачу с начальными условиями (задачу Коши) к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В настоящей работе на основе [5] найдена структура аналитического решения уравнения Фоккера–Планка при следующих весьма общих предположениях об условиях в гелиосфере.

1. Вся гелиосфера (область околосолнечного пространства, обусловленная взаимодействием солнечного ветра с межзвездной средой) условно разбивается на три подобласти:

$$0 < r < r_0;$$

$r_0 - \varepsilon < r < r_0 + \varepsilon$, где r_0 — гелиоцентрический радиус ударной волны, которая предполагается идеальной, т. е. имеющей толщину фронта $\varepsilon \rightarrow 0$;

$r_0 < r \leq r_\infty$, где r_∞ — расстояние, на котором скорость солнечного ветра становится равной скорости движения межзвездной среды относительно Солнца.

При $r < r_0$ скорость солнечного ветра $V_1 = V_{01} = \text{const}$, а при $r > r_0$ скорость плазмы меняется по закону $V_2 = V_{02}(r_0/r)^2$, что соответствует течению несжимаемой жидкости; при этом $V_{02} = V_{01}/\sigma$, где σ — отношение сжатия на ударной волне.

2. КД представляется в виде произведения двух непрерывных функций: координатно-временной $k(r, t)$ и жесткостной $k(R)$ частей, т. е. $k(r, R, t) = k(r, t) \cdot k(R)$, где $R = (A/Z)pc$ — жесткость частиц, p — импульс на нуклон, c — скорость света, A — массовое число и Z — заряд частиц в единицах заряда электрона.

3. Спектр КЛ на границе области модуляции $n_0(R_0)$ задается непрерывно дифференцируемой функцией с показателем

$$\gamma_{n_0}(R_0) = -\frac{d \ln n_0(R_0)}{d \ln R_0},$$

где $R_0, n_0(R_0)$ — жесткость и плотность частиц. Здесь и далее нулевым индексом обозначены величины на границе области модуляции.

Основные уравнения

Нестационарное уравнение Фоккера–Планка, описывающее модуляцию КЛ с учетом диффузии, конвекции и изменения энергии частиц, может быть записано в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \nabla(k \nabla F) - V \nabla F + \frac{R}{3} \nabla V \frac{\partial F}{\partial R}. \quad (1)$$

Здесь k — КД, V — скорость солнечного ветра, F — изотропная часть функции распределения, которая связана с плотностью частиц n соотношением $F = 4\pi R^2 n$.

Следуя методу, изложенному в работе [5], ищем решение уравнения (1) в виде

$$n(r, R, t) = n_0(r_0, R + \Delta R, t_0) \left(\frac{R}{R + \Delta R} \right)^2, \quad (2)$$

учитывая, что $\Delta R = \Delta R(r, R, t)$ и на границе области модуляции $R_0 = R + \Delta R$.

Дифференцируя соотношение (2) по соответствующим переменным и подставляя в уравнение (1), получим уравнение для изменения жесткости частиц с граничным условием $\Delta R = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta R}{\partial t} = & \left(\frac{2k}{r} + \frac{\partial k}{\partial r} - V - k\varphi(R_0) \right) \frac{\partial \Delta R}{\partial r} + \\ & + k \frac{\partial^2 \Delta R}{\partial r^2} / \frac{\partial \Delta R}{\partial r} \frac{\partial \Delta R}{\partial r} + \frac{R}{3} \nabla V \left(1 + \frac{\partial \Delta R}{\partial R} \right), \end{aligned}$$

где функция

$$\varphi(R_0) = \frac{3 + \gamma_{n_0}}{R_0} - \frac{1}{2 + \gamma_{n_0}} \frac{d\gamma_{n_0}}{dR_0} \quad (3)$$

полностью определяется формой спектра на границе области модуляции. Далее, произведя замену переменных по формуле

$$\frac{\partial \Delta R}{\partial r} = -\frac{V}{3k} f(R + \Delta R),$$

где f — произвольная (пока неизвестная) непрерывно дифференцируемая по всем аргументам функция, получим квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка для изменений жесткости частиц, которое по физическому смыслу представляет собой уравнение непрерывности для изменения энергии частиц КЛ:

$$\frac{\partial \Delta R}{\partial t} = \left[k \frac{\nabla V}{V} - V + \frac{V}{3} (\varphi f(R_0) - f') \right] \frac{\partial \Delta R}{\partial r} + \frac{R}{3} \nabla V \left(1 + \frac{\partial \Delta R}{\partial R} \right), \quad (4)$$

где $f' = df(R_0)/dR_0$. Система характеристических уравнений для уравнения (4) может быть записана в виде

$$dt = -\frac{dr}{k \frac{\nabla V}{V} - V + \frac{V}{3} (\varphi f - f')} = -\frac{3dR}{R \nabla V} = \frac{3d\Delta R}{R \nabla V}. \quad (5)$$

Видно, что функция $R + \Delta R = \text{const}$ является интегралом системы (5). Поэтому функция $f(R + \Delta R)$ также является интегралом системы (5) и вследствие постоянства вдоль характеристик может быть определена из условий на границе области модуляции. Используя метод, изложенный в работе [5], получим для функции $f(R_0)$ обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$f' = \varphi(R_0) f(R_0) - 3 + \frac{3k(r_0, R_0, t_0)}{V_0} \frac{\nabla V_0}{V_0} \left(1 - \frac{R_0}{f(R_0)} \right). \quad (6)$$

Исследование уравнения (6) показывает, что при $R_0 \rightarrow \infty$ функция $f(R_0) \rightarrow R_0$, а ее производная $f' \rightarrow 1$, и уравнение (6) можно представить как квадратное уравнение

$$\varphi(R_0) f^2(R_0) + \left(\frac{3k(r_0, R_0, t_0)}{V_0} \frac{\nabla V_0}{V_0} - 3 - f' \right) f(R_0) - \frac{3k(r_0, R_0, t_0)}{V_0} R_0 \frac{\nabla V_0}{V_0} = 0$$

и решать его методом итераций, принимая при достаточно больших R_0 (реально $R_0 \geq (A/Z)m_0c^2$) начальное значение $f' = 1$ и уточняя это значение по мере продвижения от больших R_0 к меньшим.

Аналитическое решение стационарной задачи

В стационарной задаче КД, скорость солнечного ветра и спектры КЛ не зависят от времени.

Для $r > r_0$ с учетом принятых при постановке задачи предположений член, описывающий измене-

ние жесткости частиц КЛ в уравнении (1), обращается в нуль и уравнение имеет известное решение, зависящее от спектра КЛ (первичное граничное условие) на границе гелиосферы $n(r_\infty, R)$ и от КД $k_2 = k_{02}k_2(r)k_2(R)$:

$$n(r \geq r_0 + 0, R) = n(r_\infty, R) \exp \left(-\frac{V_{02}r_0^2}{k_{02}k_2(R)} \int_r^{r_\infty} \frac{dr}{r^2k_2(r)} \right). \quad (7)$$

Решение для $r < r_0$ найдем, используя из системы уравнений (5) следующее характеристическое уравнение:

$$\frac{dr}{dR} = \frac{3k}{VR} - \frac{3V}{R \nabla V} + \frac{V}{R \nabla V} (\varphi f - f'). \quad (8)$$

В сферически-симметричной модели $\nabla V = 2V/r + dV/dr$, и уравнение (8) принимает вид

$$\frac{dr}{r} + \frac{1}{2V} \frac{dV}{dr} dr = \frac{3k(r)}{V} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2V} \frac{dV}{dr} \right) \frac{k(R)}{R} dR + \frac{\varphi f - f' - 3}{2} \frac{dR}{R}.$$

Отсюда методом комбинирования характеристик получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2V} \frac{dV}{dr} dr - \frac{1}{2V} \frac{dV}{dr} \frac{3k(r)}{V} \frac{k(R)}{R} dR &= \\ = \frac{dV}{2V} \left(1 - \frac{3k(r)k(R)}{VR} \frac{dR}{dr} \right) &= \\ = \frac{1}{2} \frac{dV}{V} \frac{V}{\nabla V} \frac{1}{R} (\varphi f - f' - 3) \frac{dR}{dr} &= \\ = \frac{1}{2V} \frac{dV}{dr} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2V} \frac{dV}{dr} \right)^{-1} \frac{\varphi f - f' - 3}{2} \frac{dR}{R}. \end{aligned}$$

В результате преобразований для $r \leq r_0$ в приближении бесконечно тонкого, но непрерывного фронта имеем характеристическое уравнение:

$$\frac{dr}{r} + \frac{r_0}{2V} \frac{dV}{dr} \left(\frac{r_0}{r} + \frac{r_0}{2V} \frac{dV}{dr} \right)^{-1} \Phi(R_0) \frac{dR}{R} = \frac{3k(r)}{Vr} \frac{k(R)}{R} dR + \Phi(R_0) \frac{dR}{R}, \quad (9)$$

где функция

$$\Phi(R_0) = \frac{\varphi(R_0)f(R_0) - f'(R_0) - 3}{2}$$

является интегралом уравнения (9), постоянна вдоль характеристик для $r < r_0$ и полностью определяется условиями на границе области модуляции $r = r_0 - 0$ (см. (3) и (6)). Принимая для $r < r_0$ координатную зависимость КД в виде $k_1(r) = k_{01}r/r_0$, получим при

условии $r < r_0$ ($dV/dr = 0$) следующее алгебраическое уравнение для адиабатических потерь энергии (жесткости) частиц КЛ $\Delta_1 R(r, R)$:

$$\int_R^{R+\Delta_1 R} \frac{k(R)}{R} dR + \frac{V_{01} r_0}{3k_{01}} \left(\Phi(R + \Delta_1 R) \ln \frac{R + \Delta_1 R}{R} - \ln \frac{r_0}{r} \right) = 0. \quad (10)$$

После вычисления корней $\Delta_1 R(r, R)$ алгебраического уравнения (10) спектры КЛ для $r < r_0$ могут быть определены из условия непрерывности функции распределения по формуле

$$n(r < r_0, R) = \left(\frac{R}{R + \Delta_1 R} \right)^2 n(r_0 - 0, R + \Delta_1 R).$$

Спектр КЛ на внешней границе ударной волны $n(r_0 + 0, R_0)$ вычисляется по формуле (7) и играет роль вторичного граничного условия. Для трансформации этого спектра в спектр на внутренней границе ударной волны $n(r_0 - 0, R_0)$, который служит граничным условием для уравнения (10), воспользуемся известными соотношениями (см., напр., [6]), связывающими спектры КЛ до и после прохождения фронта ударной волны, в приближении бесконечно-тонкого плоского ударного фронта. Эти соотношения, полученные из условий непрерывности функции распределения и непрерывности нормальной к фронту составляющей плотности тока КЛ, справедливы при $r_0 V/k \gg 1$, т.е. для относительно малых энергий частиц КЛ, и могут быть записаны в виде

$$n(r_0 - 0, R_0) = \nu R_0^{2-\nu} \int_{R_s}^{R_0} n(r_0 + 0, R') \cdot (R')^{\nu-3} dR', \quad R_0 > R_s,$$

где показатель спектра $\nu = 3\sigma/(\sigma - 1) = 3V_{01}/(V_{01} - V_{02})$, R_s — начальная жесткость ($R_s \sim 0,05 \div 0,1$ ГВ), $R_0 = R + \Delta_1 R$ — «начальная» жесткость для решения уравнения (10).

Обсуждение

Структура аналитического решения уравнения Фоккера–Планка для сферически-симметричной модели гелиосферы найдена впервые при достаточно общих предположениях о форме первичного спектра КЛ и энергетической зависимости КД. Однако при применении полученных результатов для конкретных задач следует учитывать следующие ограничения.

Согласно современным теоретическим представлениям и экспериментальным данным, получаемым с удаленных от Земли космических аппаратов, реальная гелиосфера сферически-асимметрична и нестационарна. Это следует из существования гелиоширотных градиентов потоков КЛ, зависимости их величин от уровня солнечной активности и смены их знака при изменении полярности общего магнитного поля Солнца.

Сферическая асимметрия гелиосферы обусловлена наличием отличной от нуля (25 км/с) относительной скорости движения Солнечной системы и межзвездной среды, а также зависимостью от гелиоширотного и азимутального углов составляющих тензора диффузии и скорости солнечного ветра. Нестационарность модели связана в основном с зависимостью составляющих тензора диффузии от уровня солнечной активности (т.е. от времени).

Однако исследование уравнения (1) показывает, что такая важная характеристика, как форма спектра КЛ, определяется в основном энергетической зависимостью КД, а координатная зависимость влияет на интенсивность КЛ и величину градиентов интенсивности.

Поэтому, несмотря на отмеченные ограничения, для решения таких задач, как определение формы энергетических (жесткостных) спектров КЛ на различных гелиоцентрических расстояниях от Солнца, отношения величин потоков КЛ с различными зарядами и массами, формы спектра КЛ вне области модуляции, обычно используется сферически-симметричная модель. Это связано с тем, что указанная модель имеет минимальное количество свободных параметров, которые необходимо задавать при решении уравнения Фоккера–Планка.

В заключение отметим, что найденная в работе структура решения может служить хорошим репером при проверке правильности решений, получаемых численными методами, она также помогает корректно поставить задачу для нестационарной модели.

Литература

1. Дорман Л.И., Кац М.Е., Носов С.Ф. и др. // Геомагнетизм и аэрономия. 1982. 22. С. 705.
2. Webb G.M., Forman M.A., Axford W.I. // Astrophys. J. 1985. 298. P. 684.
3. Зусманович А.Г. Галактические космические лучи в межпланетном пространстве. Алма-Ата: Наука, 1986. С. 17–30.
4. Чалов С.В. // Геомагнетизм и аэрономия. 1987. 27. С. 900.
5. Сулов А.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 1995. 59, №4. С. 97.
6. Березинский В.С., Буланов С.В., Гинзбург В.Л. и др. Астрофизика космических лучей. М.: Наука, 1990. С. 453–463.

Поступила в редакцию 15.10.99