

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12:514.743

**ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИК
ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ
ПО ЗАКОНАМ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ БОРНА–ИНФЕЛЬДА В ПОЛЕ
ИНТЕНСИВНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ**

В. И. Денисов, Н. В. Кравцов, Е. Г. Ларионцев, А. А. Зубрило, В. Б. Пинчук

(НИИЯФ)

Показано, что в нелинейной электродинамике Борна–Инфельда распространение слабой электромагнитной волны в поле интенсивного лазерного излучения происходит в некотором эффективном пространстве–времени, метрический тензор которого зависит от напряженности электромагнитного поля лазерного излучения. Найдены компоненты этого тензора.

Изучение различных нелинейных моделей теории поля, предпринимающееся в последнее время (см., напр., [1]), вновь возбудило интерес к нелинейной электродинамике Борна–Инфельда. Как известно, в 1934 г. Борн [2] опубликовал первый вариант нелинейной электродинамики, а позднее совместно с Инфельдом [3] усовершенствовал его.

Лагранжиан электромагнитного поля, предложенный в работе [3], может быть представлен в виде

$$L = -\frac{1}{4\pi a^2} \left[\sqrt{1 + a^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) - a^4(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2} - 1 \right], \quad (1)$$

где a — некоторая постоянная, которую удобно выразить через характерную квантовоэлектродинамическую индукцию $B_q = m^2 c^2 / e \hbar \sim 4,41 \cdot 10^{13}$ Гс и безразмерную постоянную η : $a = \eta / B_q$.

Уравнения электромагнитного поля нелинейной электродинамики Борна–Инфельда, полученные с использованием лагранжиана (1), аналогичны уравнениям макроскопической электродинамики

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{D} &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

но отличаются от них смыслом векторов \mathbf{D} и \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= 4\pi \frac{\partial L}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E} + a^2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})\mathbf{B}}{\sqrt{1 + a^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) - a^4(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2}}, \\ \mathbf{H} &= -4\pi \frac{\partial L}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B} - a^2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}}{\sqrt{1 + a^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) - a^4(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (2) нелинейны, и нелинейность содержится в членах со старшими производными, поэтому распространение электромагнитных волн во внешнем электромагнитном поле, согласно электродина-

мике Борна–Инфельда, эквивалентно распространению этих волн в некотором эффективном псевдоримановом пространстве–времени.

Найдем метрический тензор этого пространства–времени в случае, когда слабая плоская электромагнитная волна частоты ω распространяется в поле интенсивного лазерного излучения частоты Ω . Векторы магнитного и электрического полей слабой электромагнитной волны обозначим через \mathbf{b} и \mathbf{e} , а лазерного излучения — через \mathbf{B} и \mathbf{E} . Тогда суммарные поля, входящие в выражения (3), примут вид

$$\mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E} + \mathbf{e}.$$

В нулевом приближении по векторам \mathbf{b} и \mathbf{e} система нелинейных дифференциальных уравнений (2) имеет решение в виде плоской эллиптически поляризованной волны

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2) \exp[i(\Omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})] + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{E}_1 - i\mathbf{E}_2) \exp[-i(\Omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})] \right\}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\Omega} [\mathbf{K} \times \mathbf{E}], \quad (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) = 0, \quad \text{Im } \mathbf{E}_1 = \text{Im } \mathbf{E}_2 = 0$$

только при выполнении условий

$$\frac{\Omega^2}{c^2} = \mathbf{K}^2, \quad (\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_1) = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_2) = 0. \quad (4)$$

Так как эта волна поперечна и ее инварианты $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ и $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$ равны нулю, то в первом приближении по \mathbf{b} и \mathbf{e} из уравнений (2) имеем:

$$\text{rot } \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t},$$

$$\text{rot } \mathbf{b} - \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x^0} + a^2 \left\{ [\mathbf{E} \times \nabla \{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{E})\}] - \right.$$

$$\left. - \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial x^0} \{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{E})\} + [\mathbf{B} \times \nabla \{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e})\}] + \right.$$

$$+\mathbf{E} \frac{\partial}{\partial x^0} \{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e})\} = 0. \quad (5)$$

Представим векторы \mathbf{b} и \mathbf{e} в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 e^{iS}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_0 e^{iS}, \quad (6)$$

где $S = S(t, \mathbf{r})$ — эйконал, и векторы \mathbf{b}_0 и \mathbf{e}_0 будем считать слабо изменяющимися функциями t и \mathbf{r} по сравнению с функцией $\exp[iS(t, \mathbf{r})]$.

Подставляя выражения (6) в уравнения (5), учитывая условия (4) и исключая вектор \mathbf{b} , получим однородную систему из трех линейных алгебраических уравнений относительно трех компонент $e_\beta = (\mathbf{e})_\beta$:

$$A^{\alpha\beta} e_\beta = 0, \quad (7)$$

где трехмерный тензор $A^{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} = & \left[(\nabla S)^2 - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 \right] \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} - \\ & - a^2 \left\{ \left[\frac{K_\alpha}{K} (\mathbf{E} \cdot \nabla S) - \left[\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\mathbf{K} \cdot \nabla S)}{K} \right] E_\alpha \right] \times \right. \\ & \times \left[\frac{K_\beta}{K} (\mathbf{E} \cdot \nabla S) - \left[\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\mathbf{K} \cdot \nabla S)}{K} \right] E_\beta \right] + \\ & \left. + \left[N_\alpha^S + \frac{1}{cK} \frac{\partial S}{\partial t} N_\alpha^K \right] \left[N_\beta^S + \frac{1}{cK} \frac{\partial S}{\partial t} N_\beta^K \right] \right\} \end{aligned}$$

и введены обозначения $\mathbf{N}^K = [\mathbf{K} \times \mathbf{E}]$, $\mathbf{N}^S = [\nabla S \times \mathbf{E}]$.

Условие существования нетривиальных решений системы уравнений (7): $\det \|A^{\alpha\beta}\| = 0$, как известно, приводит к дисперсионному уравнению.

Используя формулы тензорной алгебры, выведенные в работе [4], из условия $\det \|A^{\alpha\beta}\| = 0$ получим

$$\left\{ \left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - (\nabla S)^2 + a^2 \mathbf{E}^2 \left[\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\mathbf{K} \cdot \nabla S)}{K} \right]^2 \right\}^2 = 0,$$

где $\mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + (\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2) \cos 2(\Omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \}$.

Это уравнение представляет собой уравнение Гамильтона–Якоби

$$g^{nm} \frac{\partial S}{\partial x^n} \frac{\partial S}{\partial x^m} = 0$$

для безмассовой частицы, движущейся в некотором эффективном пространстве-времени, метрический тензор которого зависит от поля сильной электромагнитной волны:

$$\begin{aligned} g^{00} = 1 + a^2 \mathbf{E}^2, \quad g^{0\alpha} = a^2 \mathbf{E}^2 \frac{K^\alpha}{K}, \\ g^{\alpha\beta} = -\delta^{\alpha\beta} + a^2 \mathbf{E}^2 \frac{K^\alpha K^\beta}{K^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тензор кривизны R_{jnml} для метрики тождественно равен нулю, поэтому пространство-время является псевдоевклидовым. При $\mathbf{E}_1^2 = \mathbf{E}_2^2$ компоненты метрического тензора (8) не зависят от координат и времени, но не являются диагональными. Это означает, что тензор представляет собой метрический тензор инерциальной системы отсчета, в которой, однако, скорость света зависит от направления распространения. Поэтому нелинейное воздействие циркулярно поляризованной сильной электромагнитной волны в вакууме на распространение слабой электромагнитной волны эквивалентно введению анизотропной среды.

При $\mathbf{E}_1^2 \neq \mathbf{E}_2^2$ выражения (8) зависят от координат и времени и представляют собой компоненты метрического тензора неинерциальной системы отсчета, движущейся в псевдоевклидовом пространстве-времени. Поэтому воздействие сильной электромагнитной волны, не являющейся циркулярно поляризованной, на распространение слабой электромагнитной волны эквивалентно введению анизотропной среды и действию сил инерции неинерциальной системы отсчета в той области пространства, где эти волны взаимодействуют.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-02-16039).

Литература

1. Denisov V.I. // Phys. Rev. 2000. **D61**, No. 3. P. 036004.
2. Born M. // Proc. Roy. Soc. 1934. **A143**. P. 410.
3. Born M., Infeld L. // Proc. Roy. Soc. 1934. **A144**. P. 425.
4. Григорьев В.И., Денисова И.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. № 2. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1996. No. 2. P. 1).

Поступила в редакцию
26.04.00