Заметим, что

$$\Theta S_{\{n\}} + E_{\{n\}} = \frac{(\Phi_{\{p\sigma\}M}, (\Theta\overline{\widehat{S}} + \overline{\widehat{E}})\Phi_{\{p\sigma\}M})}{(\Phi_{\{p\sigma\}M}, \Phi_{\{p\sigma\}M})} \quad (22)$$

и поэтому является оценкой сверху для минимального квантового значения свободной энергии системы фермионов. Естественно, наилучшей оценкой такого рода является минимум выражения $\Theta S_{\{n\}} + E_{\{n\}}$ по всем наборам $\{n\}$. Продемонстрируем нахождение этого минимума теперь на примере бесспиновых бозонов с гамильтонианом (3) для случая $k=1$. Пуантилистическая регуляризация для бозонов производится так же, как и в фермионном случае, и оценка сверху для минимального квантового значения энтропии в этом случае имеет вид

$$F_{\{n\}} = \sum_p \varepsilon_p \widetilde{n}_p + \frac{U_0 a^3}{2L^3} \sum_{pq} \Big(\widetilde{v}(0) + \widetilde{v}(p-q)\Big)\widetilde{n}_p\widetilde{n}_q -$$

$$-\delta_{p0}\frac{U_0 a^3}{2L^3}\widetilde{n}_0^2 + \Theta\Big(\widetilde{n}_p \ln \widetilde{n}_p - (1+\widetilde{n}_p)\ln(1+\widetilde{n}_p)\Big), \quad (23)$$

где $\widetilde{v}(p) = \int dx v(x) \exp(ipx)$, $\varepsilon_p = \hbar^2 p^2/2ma^2$, $\widetilde{n}_p$ — пуантилистические числа заполнения, связанные с обычными числами заполнения n_p соотношением типа (20). Минимум выражения (23) по $\widetilde{n}_p$ определяется решением системы уравнений

$$\varepsilon_p + \frac{U_0 a^3 n_0}{L^3} \sum_{p'} \big(\widetilde{v}(0) + \widetilde{v}(p-p')\big)\widetilde{n}_{p'} + \Theta \ln\left(\frac{\widetilde{n}_p}{1+\widetilde{n}_p}\right) -$$

$$-\mu - \delta_{p0}\left(\frac{U_0 a^3 \widetilde{n}_0}{L^3}\widetilde{v}(0) + \Theta \ln\left(\frac{\widetilde{n}_0}{1+\widetilde{n}_0}\right)\right) = 0, \quad (24)$$

$$N = \sum_p \widetilde{n}_p.$$

Если при температуре Θ решение системы (24) таково, что $\widetilde{n}_0 \sim N$, то в бозонной системе при этой температуре существует конденсат.

Литература

1. *Маслов В.П.* // ТМФ. 2000. **125**, № 3. С. 453.
2. *Маслов В.П.* // Функц. анализ и его приложения. 1999. **33**, № 4. С. 50.
3. *Маслов В.П.* // Функц. анализ и его приложения. 2000. **34**, № 4. С. 35.
4. *Маслов В.П.* // ТМФ. 1999. **121**, № 3. С. 492.
5. *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
6. *Маслов В.П.* Операторные методы. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 13.10.00

УДК 539.12.01

ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ИНТЕГРИРУЕМЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ N ЧАСТИЦ В ПОТЕНЦИАЛЕ ПЕШЛЯ–ТЕЛЛЕРА

Д. В. Мещеряков, В. Б. Тверской

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Рассмотрена задача нахождения волновых функций возбужденных состояний дискретного спектра квантовых систем, обладающих в классическом пределе дополнительными интегралами движения. Для некоторого интервала значений параметров потенциалов взаимодействия получены рекуррентные соотношения, определяющие волновые функции с точностью до нормировочного множителя.

Нахождение явных решений классических и квантовых систем, обладающих свойством полной интегрируемости, по-прежнему вызывает интерес [1–5].

К настоящему времени известно значительное число квантовых систем с N степенями свободы, обладающих дополнительными интегралами движения [3–5]. Однако лишь в ограниченном числе случаев с их помощью удается упростить задачу об определении спектра и собственных функций соответствующих гамильтонианов.

В работе [6] был предложен способ нахождения энергетических уровней и волновых функций дискретного спектра, не использующий явного вида дополнительных сохраняющихся величин. В работе [7] этим способом были исследованы состояния дискретного спектра квантовых систем с гамильтонианами вида

$$H = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2} + W(x_i)\right) + $$
$$+\alpha(\alpha+1)\sum_{i>j}^{N}[V(x_i-x_j) + V(x_i+x_j)], \quad (1)$$

потенциалом парного взаимодействия

$$V(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

и потенциалом внешнего поля

$$W(x) = \frac{\mu(\mu-1)}{2}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \lambda > 0. \quad (2)$$

Предложенная в работе [6] замена переменных $t_j = (\operatorname{ch} x_j)^{-2}$, $j = 1, \ldots, N$, позволяет понизить порядок сингулярностей в уравнении Шрёдингера $H\psi = E\psi$. Переход к симметричным относительно перестановок по t_j переменным

$$a_1 = \prod_{j=1}^{N} t_j, \ a_l = \frac{\hat{D}^{l-1}}{(l-1)!} a_1, \ \hat{D} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial t_j}, \ l = 1, \ldots, N$$

позволяет записать исходное уравнение Шрёдингера в виде, удобном для нахождения уровней энергии и волновых функций:

$$[H_1(\beta) + H_2(\beta)]\varkappa = [E - \epsilon(\beta)]\varkappa,$$

где

$$H_1(\beta) = 2\sum_{l,m=1}^{N} \left\{ \sum_{\tau=1}^{l-1} \sum_{\nu=0}^{1} [(l+m-2\tau) - \nu] a_\tau a_{l+m-\tau-\nu} - \right.$$
$$-(N-m+2)a_{m-1}a_l - (N-l+2)a_m a_{l-1} -$$
$$\left. - (N+m+1)a_l a_m] \right\} \frac{\partial^2}{\partial a_l \partial a_m} -$$
$$- \sum_{l=1}^{N} \left\{ a_{l-1}(N-l+2)[4\beta + 2\mu + 3 + 2\alpha(N+l-3)] + \right.$$
$$\left. + 2a_l(n-l+1)[2\beta + 1 + \alpha(N+l-2)] \right\} \frac{\partial}{\partial a_l},$$
$$H_2(\beta) = a_N \left\{ 2\sum_{l,m=1}^{N} a_l a_m \frac{\partial^2}{\partial a_l \partial a_m} + \right.$$
$$\left. + \sum_{l=1}^{N} a_l \frac{\partial}{\partial a_l}[4\beta + 2\mu + 3 + 4\alpha(N-1) + p(\beta)] \right\}. \tag{3}$$

Параметр β и величины $\epsilon(\beta), p(\beta)$ определяются из условия нормировки. Волновые функции представляют собой полиномы по симметричным переменным a_j:

$$\psi(x_1, \ldots, x_N) =$$
$$= \varkappa(a_1, \ldots, a_N) \prod_{j=1}^{N} z_j^{\mu}(1 - z_j^2)^{\beta} \prod_{j>k} (z_j^2 - z_k^2),$$

где $z_j = \operatorname{th} x_j$ и

$$\varkappa(a_1, \ldots, a_N) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{0 \leqslant j_1, \ldots, j_N \leqslant N} c_{j_1, \ldots, j_N} a_1^{j_1} \ldots a_N^{j_N}. \tag{4}$$

Уровни энергии определяются набором N целых чисел $j_1, \ldots, j_N$, $0 \leqslant j_1, \ldots, j_N \leqslant n$, $j_1 + \ldots + j_N = p \leqslant n$, где n — максимальная степень полинома $\varkappa$. Из условия нормировки волновой функции следует, что число n ограничено сверху:

$$n < \frac{\lambda - \mu}{2} - \alpha(N-1).$$

Энергетический спектр имеет вид

$$-E_{j_1, \ldots, j_N} = -\epsilon(\beta) - 4\sum_{l>m}^{N} l j_l j_m + 2(N+1)p(\beta) \times$$
$$\times [p(\beta) + \lambda - \mu - 2n - \alpha N] + \tag{5}$$
$$+ 2\sum_{l=1}^{N} l j_l [\alpha(2N+1) + 2n + \mu - \lambda - j_l - \alpha l].$$

В работе [7] удалось найти волновые функции лишь в простейшем случае $n = 1$. В настоящей работе мы рассмотрим волновые функции возбужденных уровней с $n = 2$.

Выражение (2) представляет собой обобщенный потенциал Пешля–Теллера. Потребовав, чтобы волновые функции, согласно (4), имели вид

$$\varkappa(a_1, \ldots, a_N) = \sum_{l=0}^{N} c_l a_l + c_{N+1} + \sum_{l \leqslant k}^{N} b_{lk} a_l a_k, \tag{6}$$

с учетом условия нормировки получаем

$$\beta = \frac{\lambda - \mu}{2} - \alpha(N-1) - 2, \quad p(\beta) = 1 - 2\lambda, \tag{7}$$

$$\epsilon(\beta) = -\frac{N}{2}\left[\frac{\alpha^2}{3}(N^2 - 1) + (\lambda - \mu - \alpha(N-1) - 4)^2\right].$$

Подставляя (5), (6) и (7) в (3), получаем систему $N(N+1)/2$ однородных линейных алгебраических уравнений с равным нулю определителем. В отличие от случая $n = 1$ в уравнениях системы присутствует вклад от первого слагаемого в $H_1(\beta)$ со вторыми производными по a_j. Это приводит к тому, что коэффициенты c_l, b_{lk} зависят от всех ненулевых коэффициентов c_m, $m > l$, b_{mn}, $m > l$, $n > k$. Действуя по индукции, можно получить рекуррентные соотношения, связывающие коэффициенты в выражении (6). В результате в зависимости от значений квантовых чисел $j_1, \ldots, j_N$ получаем три неэквивалентных набора рекуррентных соотношений.

1. В первом случае $j_l = 2\delta_{ls}$, $s = 1, \ldots, N$, $p = 2$; $s' = 2s - N - 1$, $n' = 2s - j$, $K = (N - s + 1)(\lambda - \mu - 2 - \alpha(N - s))$; $b_{ss} = d_s$, где d_s — произвольная константа, поскольку нашим способом волновые функции определяются с точностью до нормировки, и

$$b_{jl} = 0, \quad j + l > 2s; \quad c_j = 0, \ j > s';$$
$$b_{jn'} = \frac{4(n' - j)}{F_{j00}} \sum_{\sigma=j+1}^{s} b_{\sigma n' - \sigma + j}, \tag{8}$$

где величины F_{jkl} определены ниже.

2. Во втором случае $j_l=\delta_{ls}+\delta_{lN}$, $s=1,\ldots,N-1$, $p=2$; $s'=s-1$, $n'=N$, $K=\mu-\lambda+1$; $b_{sN}=d_s$, где d_s — произвольная константа, и

$$b_{jl}=0,\quad j+l>s+N;\quad c_j=0,\ j>s'.$$

Остальные соотношения имеют вид

$$b_{sN}=\frac{1-2\lambda}{Q_s}d_s,$$

$$b_{s-mN}=\frac{1}{Q_{s-m}}\Bigg\{-2\Big[(N-s+m+1)\Big(2\lambda-3-2\alpha(N-s+m)\Big)+1\Big]b_{s-m+1N}+4(N-s+m)\sum_{k=1}^{m}\sum_{\tau=0}^{1}b_{s-m+kN-k+\tau}+(1-2\lambda)c_{s-m}\Bigg\},\quad m=1,\ldots,s-1.$$

В последнем соотношении суммирование проводится при условии $2k\leqslant N-s+m+\tau$.

Отметим, что условие самосопряженности гамильтониана (1) приводит к неравенству $(2\lambda-1)>10+4\alpha(N-1)$, т.е. коэффициенты c_j и b_{jk} не могут быть независимыми.

3. В третьем случае $j_l=\delta_{ls}+\delta_{lN-m}$, $s=1,\ldots,N-2$, $m=1,\ldots,N-s+1$, $b_{sN-m}=d_{sN-m}$; $s'=s-m-1$, $n'=N+s-m-j$, где d_sN-m — произвольная константа, и

$$b_{jl}=0,\quad j+l>s';\quad c_j=0,\quad j+l>N+s-m.$$

Коэффициенты $b_{jn'}$ определяются из выражения (8). Введем следующие обозначения:

$$R_{jkl}=2^l\prod_{\tau=1}^{l}\{(s-j+k-\tau)[\lambda-\mu-3-\alpha(2N-s-j+k-\tau)]-K\},$$

$$F_{jkl}=2^{k-l}\prod_{\tau=0}^{k-l}\{(s-j)[\lambda-\mu-3-\alpha(2N-s-j+1)]+(N-n'+k-\tau+1)[\lambda-\mu-1-\alpha(N-n'+k-\tau)]-K\},$$

$$S_j=R_{j11}+N-j+1,$$

$$Q_j=R_{j11}+2(N-s+1)[\lambda-\mu-3-\alpha(N-3)]+2(2\lambda-2\mu-7).$$

Рекуррентные соотношения, общие для всех трех случаев, записываются с помощью введенных величин следующим образом:

$$c_{s'-k+1}=\frac{(N-s'+k)!}{\Gamma[(2\lambda-5)/(2\alpha)-N+s'-k]}\times\Bigg[(-2\alpha)^k\frac{\Gamma[(2\lambda-5)/(2\alpha)-N+s']}{(N-s')!R_{s'kk}}c_{s'+1}+4\sum_{l=1}^{k}(-2\alpha)^{l-1}\frac{\Gamma[(2\lambda-5)/(2\alpha)-N+s'-k+l-1]}{(N-s'+k-l)!R_{s'kl}}\times\sum_{\sigma=1}^{s-s'+k-\tau-l}\sum_{\tau=0}^{1}b_{s'-k+l+\sigma+\tau N-\sigma+1}(1-\delta_{\tau1}\delta_{lk})\Bigg],$$
$$k=1,\ldots,s'$$

(в этом выражении суммирование проводится при выполнении условия $2\sigma\leqslant N+1+k-s'-l-\tau$);

$$b_{jn'-k}=(-4\alpha)^k\frac{(N-n'+k+1)!}{\Gamma[(\lambda-2)/\alpha-N+n'-k]}\times\Bigg\{\frac{\Gamma[(\lambda-2)/\alpha-N+n']}{(N-n'+1)!F_{jk1}}b_{jn'}-2\sum_{l=1}^{k}(n'-l-j)\sum_{\sigma=j+1}^{s}\sum_{\tau=0}^{1}(-4\alpha)^k\times\frac{\Gamma[(\lambda-2)/\alpha-N+n'-l]}{(N-n'+l+1)!F_{jkl}}\times\Bigg[\Big[2(N-j+1)[\lambda-2-\alpha(N-1)]+n'-l+j\Big]b_{j+1n'-l}-2(n'-l-j)\sum_{\sigma=j+1}^{s}\sum_{\tau=0}^{1}b_{\sigma n'-l-\sigma+\tau+j}(1-\delta_{\tau1}\delta_{\sigma j+1})\Bigg]\Bigg\},$$
$$k=1,\ldots,n'-j+1$$

(в этом выражении суммирование проводится при выполнении условия $2\sigma\leqslant n'-l+1+\tau+j$);

$$b_{jj}=\frac{2(N-j+1)[2\lambda-3-2\alpha(N-j)]}{S_j}b_{jj+1}.$$

Приведенные рекуррентные соотношения определяют коэффициенты c_j и b_{jk} для произвольного N, а тем самым в силу (6) и волновые функции с точностью до нормировочного множителя. При выполнении условия $0<\lambda-\mu-2\alpha(N-1)<6$ найденные здесь волновые функции и волновые функции для случая $n=1$, вычисленные в работе [7], представляют собой весь дискретный спектр рассматриваемых систем.

В заключение отметим, что волновые функции дискретного спектра рассмотренных систем в более широких интервалах значений констант λ, μ и α, допускающих $n\geqslant 3$, могут быть найдены аналогичным способом.

Полученные результаты могут быть использованы для проверки различных приближенных методов решения многочастичных квантовых задач, а также при исследовании систем, близких к интегрируемым.

Литература

1. *Dittrich J., Inozemtsev V.I.* // J. Phys. A. 1993. **20**. P. 753.
2. *Мещеряков Д.В., Тверской В.Б.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 1. С. 56 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 1. P. 66).
3. *Calogero F.* // J. Math. Phys. 1971. **12**, No. 3. P. 419.
4. *Sutherland B.* // Phys. Rev. 1971. **A4**, No. 5. P. 2019.
5. *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* // Phys. Reports. 1983. **94**. P. 312.
6. *Иноземцев В.И., Мещеряков Д.В.* // Кр. сообщ. ОИЯИ. 1984. № 4–84. С. 22.
7. *Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V.* // Phys. Scripta. 1986. **33**, No. 1. P. 99.

Поступила в редакцию
10.01.00

УДК 514.763.85; 514.763.24

КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

А. В. Киселев

(*кафедра математики*)

Определены производящие сечения законов сохранения для эллиптического уравнения Лиувилля. Показано, что каждому производящему сечению соответствует нетривиальный закон сохранения; установлено, что все классические законы сохранения порождаются симметриями лагранжиана. Приведены явные формулы, сопоставляющие каждому производящему сечению некоторый закон сохранения.

Двумерное эллиптическое уравнение Лиувилля

$$\mathcal{E} = \{F \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x^2} - \exp(2u) = 0\} \qquad (1)$$

возникает во многих разделах математики и математической физики. В римановой геометрии оно представляет собой уравнение Гаусса, записанное в конформных координатах для плоскости Лобачевского [1]. Кроме того, уравнение (1) применяется при исследовании автомодельных решений уравнений Кадомцева–Погуце [2].

Рассмотренный в настоящей работе подход связан с решением определяющих уравнений на производящие сечения законов сохранения [3] и реализацией метода восстановления сохраняющихся токов по производящим сечениям [4].

1. Производящие сечения

Известно [3], что производящие сечения ψ (в случае единственной зависимой переменной $u(x^1, x^2)$ — производящие функции) законов сохранения принадлежат ядру $\ker\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*$ оператора, формально сопряженного оператору универсальной линеаризации, ограниченному на уравнение $\mathcal{E}$:

$$\ell_F = \sum_\sigma \frac{\partial F}{\partial p_\sigma} D_\sigma, \qquad (2)$$

где $p_\sigma = \partial^{|\sigma|} u / \partial x^\sigma$, σ — мультииндекс, x^σ пробегает все наборы независимых переменных x^1 и x^2, $D_i = \partial/\partial x^i + \sum_\sigma p_{\sigma+i}\, \partial/\partial p_\sigma$ — полная производная по i-й координате. Для уравнения (1) определяющее уравнение на производящие функции имеет вид

$$D_1^2 \psi + D_2^2 \psi - 2\exp(2u)\psi = 0. \qquad (3)$$

Производящие функции классических законов сохранения суть функции независимых координат x^1 и x^2, переменной u и ее первых производных $p_1 \equiv p_{(1,0)}$, $p_2 \equiv p_{(0,1)}$: $\psi = \psi(x^1, x^2, u, p_1, p_2)$. В этом случае решения уравнения (3) имеют вид

$$\psi = A(x^1, x^2) p_1 + B(x^1, x^2) p_2 + C(x^1, x^2), \qquad (4)$$

причем функции A и B удовлетворяют соотношениям Коши–Римана, а C определяется из этих соотношений:

$$C = \frac{\partial A}{\partial x^1} = \frac{\partial B}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial A}{\partial x^2} + \frac{\partial B}{\partial x^1} = 0, \qquad (5)$$

т.е. $A = \mathrm{Re}(\zeta)$, $B = \mathrm{Im}(\zeta)$ являются соответственно вещественной и мнимой частями голоморфной в $\mathbb{C}$ функции $\zeta(x^1 + ix^2)$.

2. Законы сохранения

О п р е д е л е н и е. Сохраняющимся называется ток $(S_1, S_2) = -S_2\, dx^1 + S_1\, dx^2$, дивергенция которого равна нулю на уравнении $\mathcal{E} = \{F = 0\}$: $D_1(S_1) + D_2(S_2) = \Delta(F)$, $\Delta = \sum_\sigma a_\sigma D_\sigma$. Производящая функция ψ закона сохранения η имеет в этом случае вид $\Delta^*(1)$ [3, 5].

Заранее не известно, каждому ли элементу ядра $\ker\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*$ соответствует нетривиальный закон сохранения или же существуют посторонние решения определяющих уравнений. Процедура исключения таких решений состоит в следующем.

Пусть $\psi \in \ker\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*$, т.е. существует такой $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор Δ (оператор вида $\sum_\sigma a_\sigma D_\sigma$), что

$$\ell_F^*(\psi) = \Delta(F). \qquad (6)$$