Литература

1. *Dittrich J., Inozemtsev V.I.* // J. Phys. A. 1993. **20**. P. 753.
2. *Мещеряков Д.В., Тверской В.Б.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 1. С. 56 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 1. P. 66).
3. *Calogero F.* // J. Math. Phys. 1971. **12**, No. 3. P. 419.
4. *Sutherland B.* // Phys. Rev. 1971. **A4**, No. 5. P. 2019.
5. *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* // Phys. Reports. 1983. **94**. P. 312.
6. *Иноземцев В.И., Мещеряков Д.В.* // Кр. сообщ. ОИЯИ. 1984. № 4–84. С. 22.
7. *Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V.* // Phys. Scripta. 1986. **33**, No. 1. P. 99.

Поступила в редакцию
10.01.00

УДК 514.763.85; 514.763.24

КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

А. В. Киселев

(*кафедра математики*)

Определены производящие сечения законов сохранения для эллиптического уравнения Лиувилля. Показано, что каждому производящему сечению соответствует нетривиальный закон сохранения; установлено, что все классические законы сохранения порождаются симметриями лагранжиана. Приведены явные формулы, сопоставляющие каждому производящему сечению некоторый закон сохранения.

Двумерное эллиптическое уравнение Лиувилля

$$\mathcal{E}=\{F\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^1\partial x^1}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2\partial x^2}-\exp(2u)=0\} \qquad (1)$$

возникает во многих разделах математики и математической физики. В римановой геометрии оно представляет собой уравнение Гаусса, записанное в конформных координатах для плоскости Лобачевского [1]. Кроме того, уравнение (1) применяется при исследовании автомодельных решений уравнений Кадомцева–Погуце [2].

Рассмотренный в настоящей работе подход связан с решением определяющих уравнений на производящие сечения законов сохранения [3] и реализацией метода восстановления сохраняющихся токов по производящим сечениям [4].

1. Производящие сечения

Известно [3], что производящие сечения ψ (в случае единственной зависимой переменной $u(x^1,x^2)$ — производящие функции) законов сохранения принадлежат ядру $\ker\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*$ оператора, формально сопряженного оператору универсальной линеаризации, ограниченному на уравнение $\mathcal{E}$:

$$\ell_F=\sum_\sigma\frac{\partial F}{\partial p_\sigma}D_\sigma, \qquad (2)$$

где $p_\sigma=\partial^{|\sigma|}u/\partial x^\sigma$, σ — мультииндекс, x^σ пробегает все наборы независимых переменных x^1 и x^2, $D_i=\partial/\partial x^i+\sum_\sigma p_{\sigma+i}\,\partial/\partial p_\sigma$ — полная производная по i-й координате. Для уравнения (1) определяющее уравнение на производящие функции имеет вид

$$D_1^2\psi+D_2^2\psi-2\exp(2u)\psi=0. \qquad (3)$$

Производящие функции классических законов сохранения суть функции независимых координат x^1 и x^2, переменной u и ее первых производных $p_1\equiv p_{(1,0)}$, $p_2\equiv p_{(0,1)}$: $\psi=\psi(x^1,x^2,u,p_1,p_2)$. В этом случае решения уравнения (3) имеют вид

$$\psi=A(x^1,x^2)p_1+B(x^1,x^2)p_2+C(x^1,x^2), \qquad (4)$$

причем функции A и B удовлетворяют соотношениям Коши–Римана, а C определяется из этих соотношений:

$$C=\frac{\partial A}{\partial x^1}=\frac{\partial B}{\partial x^2},\quad \frac{\partial A}{\partial x^2}+\frac{\partial B}{\partial x^1}=0, \qquad (5)$$

т. е. $A=\mathrm{Re}(\zeta), B=\mathrm{Im}(\zeta)$ являются соответственно вещественной и мнимой частями голоморфной в $\mathbb{C}$ функции $\zeta(x^1+ix^2)$.

2. Законы сохранения

Определение. Сохраняющимся называется ток $(S_1,S_2)=-S_2\,dx^1+S_1\,dx^2$, дивергенция которого равна нулю на уравнении $\mathcal{E}=\{F=0\}$: $D_1(S_1)+D_2(S_2)=\Delta(F)$, $\Delta=\sum_\sigma a_\sigma D_\sigma$. Производящая функция ψ закона сохранения η имеет в этом случае вид $\Delta^*(1)$ [3, 5].

Заранее не известно, каждому ли элементу ядра $\ker\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*$ соответствует нетривиальный закон сохранения или же существуют посторонние решения определяющих уравнений. Процедура исключения таких решений состоит в следующем.

Пусть $\psi\in\ker\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*$, т. е. существует такой $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор Δ (оператор вида $\sum_\sigma a_\sigma D_\sigma$), что

$$\ell_F^*(\psi)=\Delta(F). \qquad (6)$$

Если, кроме того, существует другой самосопряженный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор $\nabla = \nabla^*$, причем выполнено равенство

$$\ell_\psi^{\mathcal{E}} + \overline{\Delta}^* = \overline{\nabla} \circ \ell_F^{\mathcal{E}} \tag{7}$$

(здесь и далее черта над оператором означает его ограничение на уравнение $\mathcal{E}$), то ψ является производящей функцией некоторого закона сохранения.

Обратим внимание на порядки указанных выше операторов и старших производных, входящих в функции ψ и F. Из уравнения (6) следует, что Δ и, следовательно, левая часть (7) — операторы первого порядка. Поскольку порядок оператора ℓ_F равен двум, то $\nabla = 0$ и

$$\ell_\psi^{\mathcal{E}} + \overline{\Delta}^* = 0. \tag{8}$$

Рассматривая операторы Δ вида $a_0(\psi) + a_1(\psi)D_1 + a_2(\psi)D_2$, получаем, что условие (8) эквивалентно соотношению $2C - \partial A/\partial x^1 - \partial B/\partial x^2 = 0$ для компонент функции ψ. Однако оно заведомо выполнено в силу (5); значит, дополнительные ограничения на производящие функции законов сохранения отсутствуют и производящие функции находятся во взаимно-однозначном соответствии с сохраняющимися токами.

3. Симметрии лагранжиана

Уравнение (1) может быть получено при варьировании лагранжиана $\mathcal{L} = \int L\, dx^1 \wedge dx^2$ с плотностью $L = \left(p_1^2 + p_2^2 + \exp(2u)\right)/2$. Соответствующее производящей функции ψ эволюционное дифференцирование $\mathrm{Ev}_\psi = \sum_\sigma D_\sigma(\psi)\partial/\partial p_\sigma$ называется нётеровой симметрией лагранжиана $\mathcal{L}$, если $\mathrm{Ev}_\psi(\mathcal{L}) = 0$. Отметим, что Ev_ψ является нётеровой симметрией $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Ev}_\psi(F) + \ell_\psi^*(F) = 0. \tag{9}$$

При этом ψ — производящая функция закона сохранения уравнения (1).

Подставляя в (9) полученные ранее условия (5), воспользовавшись выражением (4), можно убедиться в том, что условие (9) выполнено для всех функций ψ и, следовательно, все классические законы сохранения происходят из соответствующих симметрий лагранжиана.

4. Восстановление сохраняющихся токов

В отличие от нахождения полей Ли по производящим функциям симметрий нахождение сохраняющихся токов не столь тривиально и требует дополнительного анализа. Опишем кратко сущность предложенного в работе [4] метода построения 1-форм, точных на уравнении $\mathcal{E}$.

Рассмотрим поле Ev_f, которое задано функцией $f = u$ и порождает отображение A_τ: $(x^i, p_\sigma) \mapsto$ $\mapsto (x^i, p_\sigma \exp(\tau))$. Тогда

$$\frac{d}{d\tau} A_\tau^*(\omega) = A_\tau^*\left(\mathrm{Ev}_f(\omega)\right) = A_\tau^*\left(\ell_\omega(f)\right). \tag{10}$$

Выберем в качестве ω форму $\omega = \langle F, \psi\rangle = F\psi\, dx^1 \wedge dx^2$, и пусть η — искомый ток на уравнении $\{F = 0\}$, соответствующий производящей функции ψ. Заметим, что в правой части (10) $\ell_\omega(f) = \langle \ell_\omega^*(1), f\rangle + \bar{d}G(\ell_\omega \circ f)$; отображение G: $\mathcal{C}\,\mathrm{Diff}(\mathcal{F}, \overline{\Lambda}^2) \to \overline{\Lambda}^1$, переводящее в 1-формы модуль $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов, действующих на гладкие функции и принимающих значения в 2-формах (все конструкции ограничены на уравнение $\mathcal{E}$), определено следующим образом:

$$G\Big(\sum_\sigma a_\sigma D_\sigma\Big) = \sum_{\substack{|\sigma|>0\\ \forall j\, \in\, \sigma}} (-1)^{|\sigma|-1} D_{\sigma-j}(a_\sigma)\omega_{(-j)}.$$

Здесь $\omega_{(-j)} = (-1)^{j+1}\, dx^1 \ldots \widehat{dx^j} \ldots dx^n$ (в нашем случае $n = 2$), $\sigma - j$ — мультииндекс, получающийся в результате однократного исключения индекса $j = 1, 2$ из мультииндекса σ.

Проинтегрируем (10) по τ от $-\infty$ до 0. Получим

$$\begin{aligned} &\langle F, \psi\rangle = A_0^*(\omega) = \\ &= \int^0 \frac{d}{d\tau} A_\tau^*(\omega)\, d\tau = \int^0 A_\tau^*\left(\ell_\omega(f)\right) d\tau = \\ &= \bar{d} \int^0 A_\tau^*\left(G(\ell_\omega \circ f)\right) d\tau \equiv \bar{d}\eta, \end{aligned} \tag{11}$$

откуда следует искомый вид тока η.

З а м е ч а н и е. В процессе вычислений все токи определяются с точностью до тривиальных, каждый из которых имеет вид $\eta_T = \overline{D}_1(T)\, dx^1 + \overline{D}_2(T)\, dx^2$ при некоторой функции T.

Проводя описанные выше рассуждения для уравнения $\{F = 0\}$ и функций ψ вида (4)–(5), получаем окончательный результат: сохраняющийся ток (S_1, S_2) имеет компоненты

$$\begin{aligned} S_1 = {} & \frac{1}{2}Aup_{(0,2)} - \frac{1}{2}A\exp(2u) + \frac{1}{2}Ap_1^2 + \frac{1}{2}Bp_1p_2 + Cp_1 - \\ & - \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x^1}up_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial x^1}up_2 - \frac{1}{2}Bup_{(1,1)} - \frac{\partial C}{\partial x^1}u, \\ S_2 = {} & \frac{1}{2}Bup_{(2,0)} - \frac{1}{2}B\exp(2u) + \frac{1}{2}Bp_2^2 + \frac{1}{2}Ap_1p_2 + Cp_2 - \\ & - \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x^2}up_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial x^2}up_2 - \frac{1}{2}Aup_{(1,1)} - \frac{\partial C}{\partial x^2}u. \end{aligned}$$

Заключение

Проведенные рассуждения показывают, что эллиптическое уравнение Лиувилля (1) богато разнообразными геометрическими структурами. В частности, установлено, что законов сохранения (причем одних только классических) достаточно много — они параметризованы голоморфными в $\mathbb{C}$ функциями; при этом существенно то, что уравнение (1) лагранжево: все классические законы сохранения происходят из симметрий лагранжиана.

В настоящее время остается открытым вопрос об описании всех высших законов сохранения для уравнения (1), т.е. таких, что соответствующие им производящие сечения зависят от производных выше второго порядка функции $u(x^1, x^2)$ (установлено, что симметрии и законы сохранения второго порядка отсутствуют).

Автор благодарит А. В. Овчинникова за постановку задачи, а также А. М. Вербовецкого и И. С. Красильщика за ценные замечания и конструктивную критику.

Литература

1. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Т. I. М.: Наука, 1979.
2. *Gusyatnikova V.N., Samokhin A.V., Titov V.S.* et al. // Acta Appl. Math. 1989. **15**, No. 1. P. 24.
3. *Бочаров А.В., Виноградов А.М., Красильщик И.С.* и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. / Под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщика. М.: Факториал, 1997.
4. *Vinogradov A. M.* // J. Math. Anal. Appl. 1984. **100**, No. 1. P. 1.
5. *Krasil'shchik J., Verbovetsky A.* Homological Methods in Equations of Mathematical Physics, Opava. Czech Republic: Open Education & Science, 1998.

Поступила в редакцию
17.03.00

УДК 537.874

ИССЛЕДОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ НЕСФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЕЙ В СЛОЕ НА ПОДЛОЖКЕ

Е. Ю. Еремина, А. Г. Свешников

(*кафедра математики*)

Построена математическая модель рассеяния поляризованного излучения неосесимметричной структурой, расположенной под пленкой на проницаемой подложке. Приведены результаты для рассеяния частицами различной формы.

По мере совершенствования объемных интегральных схем становится все более актуальной проблема обеспечения чистоты кремниевых вейферов, использующихся как основа современных интегральных схем. Дальнейшая миниатюризация схем микропроцессоров требует ужесточения стандартов отклонения их конфигураций от заданной структуры, в частности чистоты поверхности кремниевого вейфера на различных стадиях технологического процесса. Обнаружение загрязняющих частиц на вейфере осуществляется с помощью оптических поверхностных сканеров. Совершенствование конструкций сканеров представляет собой приоритетную задачу для силиконовой промышленности [1]. Разработка математических моделей анализа процессов рассеяния помогает решить эту задачу.

Большое количество работ было посвящено анализу рассеивающих свойств загрязняющих частиц различных материалов на основе метода дискретных источников (МДИ). В работе [2] проводился анализ рассеяния света частицами и ямами на кремниевой подложке. В работе [3] МДИ обобщен на случай осесимметричной частицы в слое. Однако вопрос о влиянии деформаций, ведущих к неосесимметричным структурам, на рассеивающие свойства микрочастиц практически не рассматривался. В настоящей работе МДИ обобщается на случай произвольной проницаемой частицы, расположенной в слое на поверхности подложки, когда частица с подложкой уже не образуют осесимметричной структуры. На основе программной реализации развитого метода проводится анализ рассеивающих свойств эквиобъемных частиц с различными геометриями.

1. Математическая модель неосесимметричного рассеивателя

Начнем с математической постановки рассматриваемой задачи. Пусть $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$ — поле плоской электромагнитной волны линейной поляризации, падающей под углом θ_0 относительно нормали на плоскую границу Ξ_f раздела воздух–слой $D_0 - D_f$, а частица, занимающая область D_i с гладкой границей ∂D, расположена целиком внутри слоя толщины d, ограниченного плоскостями Ξ_f и Ξ_1. Плоскость Ξ_1 разделяет слой и подложку D_1. Введем прямоугольную систему координат, выбрав ее начало на плоскости Ξ_1, а ось Oz направим вдоль нормали к подложке в область D_f. Тогда граничная задача рассеяния принимает вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_t = ik\varepsilon_t\mathbf{E}_t;\ \operatorname{rot}\mathbf{E}_t = -ik\mu_t\mathbf{H}_t \text{ в } D_t, \quad t = 0, f, 1, i,$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{n}_p \times (\mathbf{E}_i(p) - \mathbf{E}_f(p)) = 0, \\
&\mathbf{n}_p \times (\mathbf{H}_i(p) - \mathbf{H}_f(p)) = 0,
\end{aligned} \quad p \in \partial D,$$
$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}_f(p) - \mathbf{E}_{0,1}(p)) = 0, \\
&\mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}_f(p) - \mathbf{H}_{0,1}(p)) = 0,
\end{aligned} \quad p \in \Xi_{f,1} \tag{1}$$

с условиями излучения (затухания) для рассеянных полей на бесконечности. Здесь $\{\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t\}$ — полное