падения для P-поляризованного излучения. Как видно из рисунка, при увеличении деформации и уменьшении угла падения результаты сильнее зависят от расположения частицы по отношению к плоскости падения.

Литература

1. *Baliga J.* // Semicond. International. 1997. No. 4. P. 64.
2. *Еремин Е.Ю., Орлов Н.В., Свешников А.Г.* // Электромагнитные волны. 1998. № 5. С. 34.
3. *Еремина Е.Ю., Свешников А.Г* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 1. С. 12 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 1. P. 8).
4. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970.
5. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.
6. *Дмитриев В.И.* Поля в слоистых средах. М: Изд-во Моск. ун-та, 1963.

Поступила в редакцию
27.03.00

УДК 517.958:621.372.8

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ РАДИОВОЛНОВОДА

А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, М. Д. Малых, А. Г. Свешников

(*кафедра математики*)

Проводится обоснование базисности системы корневых векторов цилиндрического волновода кругового сечения с радиальным диэлектрическим заполнением. Доказанное свойство позволяет обосновать применение метода нормальных волн к задаче возбуждения волновода.

Полнота системы корневых векторов волновода рассматривалась в работах [1] и [2], однако вопросы базисности изучаемых систем в них не обсуждались. В работах [3, 4] установлена полнота системы корневых векторов волновода для достаточно общего вида диэлектрической и магнитной проницаемости. В настоящей работе, которая продолжает тему [3, 4], показывается, что цилиндрический волновод с радиальной диэлектрической проницаемостью является примером такого, у которого система корневых векторов не только полна, но и образует базис со скобками.

1. Постановка задачи

Пусть поперечное сечение Ω волновода есть круг единичного радиуса. Поместим в некоторую точку на оси цилиндра начало координат цилиндрической системы координат, ось Oz направим по оси цилиндра. Пусть волновод заполнен веществом с кусочно-непрерывной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(r,\varphi,z)=\varepsilon(r)$, значения которой лежат между константами ε_1 и $\varepsilon_2>0$, и с магнитной проницаемостью $\mu(r,\varphi,z)\equiv 1$. Пусть стенки волновода идеально проводящие.

Будем искать решения уравнений Максвелла в виде нормальных волн $E,H\sim \exp^{-i\omega t+i\gamma z+in\varphi}$. Система уравнений Максвелла включает восемь уравнений для шести неизвестных, поэтому следует выбрать из уравнений шесть основных. В нашем случае удобно выбрать следующие:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}H_z-i\gamma H_\varphi+ik\varepsilon E_r=0,\\ i\gamma H_r-\dfrac{\partial}{\partial r}H_z+ik\varepsilon E_\varphi=0,\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon E_r)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(\varepsilon E_\varphi)+i\gamma\varepsilon E_z=0,\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}E_z-i\gamma E_\varphi-ikH_r=0,\\ i\gamma E_r-\dfrac{\partial}{\partial r}E_z-ikH_\varphi=0,\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rH_r)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}H_\varphi+i\gamma H_z=0.\end{cases}\tag{2}$$

Введем обозначение

$$X=(H_r,H_\varphi,E_z)^T=(H_-E_z)^T.$$

Тогда, исключая из (1) и (2) функции E_r, E_φ и H_z и учитывая зависимость от φ, приходим к задаче на собственные значения:

$$\begin{pmatrix} r\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}r+k^2\varepsilon r & inr\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{1}{r} & -k\varepsilon n\\ in\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}r & -\dfrac{n^2}{r}+k^2\varepsilon r & -ik\varepsilon r\dfrac{\partial}{\partial r}\\ kn\varepsilon & ik\dfrac{\partial}{\partial r}r\varepsilon & \dfrac{\partial}{\partial r}r\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{\varepsilon}{r}n^2\end{pmatrix}X=$$

$$=\gamma^2 r\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&\varepsilon\end{pmatrix}X,\tag{3}$$

где $X \in V$. Множество V определяется как множество векторов, принадлежащих $C^\infty[0,1]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$X_1(1) = 0 \quad \text{и} \quad X_3(1) = 0, \quad |X(0)| < \infty$$

и не приведенному выше уравнению Максвелла:

$$-ik\varepsilon X_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rX_2) - \frac{1}{r}inX_1,$$

т. е.

$$-ik\varepsilon E_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{1}{r}inH_r.$$

2. Слабая постановка задачи в пространстве Соболева

Введем пространство W как замыкание V по норме, порожденной скалярным произведением

$$(X,Y) = \int_0^1 r\,dr\,(x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \varepsilon x_3\overline{y}_3),$$

и пространство W^1 со скалярным произведением

$$(X,Y)_1 = \int_0^1 r\,dr\,\mathrm{div}\,H_-\overline{\mathrm{div}\,H_-} + \\ + \int_0^1 \varepsilon r\,dr\,\left(\mathrm{grad}\,E_z, \overline{\mathrm{grad}\,E_z}\right) + (X,Y),$$

где

$$\mathrm{div}\,H_- = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rH_r + \frac{in}{r}H_\varphi$$

(черта сверху обозначает комплексное сопряжение). Для получения слабой постановки задачи следует умножить (3) слева на произвольный вектор Y^T из V и проинтегрировать получившийся скаляр по r в пределах от 0 до 1. Тогда придем к следующей постановке задачи (3):

$$(X,Y)_1 - b(X,Y) = -\left(\gamma^2 - 1\right)(X,Y) \quad \forall\, Y \in V, \quad (4)$$

где

$$b(X,Y) = \int_0^1 dr\left\{k^2\varepsilon r\left(\bar{Y}_1X_1 + \bar{Y}_2X_2\right) - k\varepsilon n\bar{Y}_1X_3 + \right. \\ \left. + kn\varepsilon\bar{Y}_3X_1 - ik\varepsilon r\bar{Y}_2\frac{\partial}{\partial r}X_3 - ik\varepsilon rX_2\frac{\partial}{\partial r}\bar{Y}_3\right\}.$$

Заметим, что верна следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Пространство W^1 компактно вложено в W.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что из любой ограниченной в W^1 последовательности можно извлечь сходящуюся в W подпоследовательность. Для этого заметим сначала, что составляющую $H_- \in W^1$ можно представить в виде

$$H_- = \mathrm{grad}\,\psi + \mathrm{rot}\,\chi,$$

где

$$\mathrm{grad}\,\varphi(r) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\varphi, \frac{in}{r}\varphi\right)^T,$$

$$\mathrm{rot}\,\varphi(r) = \left(\frac{in}{r}\varphi - \frac{\partial}{\partial r}\varphi\right)^T.$$

Если бы это представление имело место, то, поскольку

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\chi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{in}{r}\chi - \frac{in}{r}\frac{\partial}{\partial r}\chi = 0,$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\chi, e_z) = \left(\frac{in}{r}\right)^2\chi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\chi = \Delta\chi,$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\psi, e_z) = \frac{in}{r}\frac{\partial}{\partial r}\psi - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{in}{r}\psi = 0,$$

функции ψ и χ являлись бы решениями задач

$$\begin{cases} \Delta\psi = \mathrm{div}\,H_-, \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\psi\,|_{r=1} = 0, \quad |\psi(0)| < \infty, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \Delta\chi = (\mathrm{rot}\,H_-, e_z) = -ik\varepsilon E_z, \\ (\mathrm{rot}\,\chi, n) = \dfrac{\partial}{\partial\tau}\chi\Big|_{r=1} = 0, \quad |\chi(0)| < \infty, \end{cases}$$

или даже

$$\begin{cases} \Delta\chi = (\mathrm{rot}\,H_-, e_z) = -ik\varepsilon E_z, \\ \chi\Big|_{r=1} = 0, \quad |\chi(0)| < \infty. \end{cases}$$

Поскольку операции $\mathrm{div}\,H_-$ и $(\mathrm{rot}\,H_-, e_z) = -ik\varepsilon E_z$ определены в обобщенном смысле на всем пространстве W^1, то для любого $H_- \in W^1$ можно найти соответствующие ψ и χ. Вычислим вектор $H'_- = \mathrm{grad}\,\psi + \mathrm{rot}\,\chi$. Разность $H''_- = H_- - H'_-$ будет удовлетворять уравнениям ТЕМ-волны:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,H''_- = 0, \\ (\mathrm{rot}\,H''_-, e_z) = 0, \\ (H''_-, n)\Big|_{r=1} = 0, \end{cases}$$

которая у волновода с односвязным сечением тождественно равна нулю, следовательно,

$$H_- = \mathrm{grad}\,\psi + \mathrm{rot}\,\chi.$$

Пусть u_n — слабое решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u_n = f_n, \\ |u_n(0)| < \infty, \\ \dfrac{\partial}{\partial r} u_n \Big|_{r=1} = 0 \;\text{ или }\; u_n \Big|_{r=1} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что весовое пространство Соболева W_r^2, построенное как замыкание множества $\{u(r) : u(r) \in C^\infty[0,1],\ \frac{\partial}{\partial r} u_n \big|_{r=1} = 0\}$ или $C_0^\infty[0,1]$ по норме $\|u\|^2 = \int\limits_0^1 r\,dr \left|\frac{du}{dr}\right|^2$, компактно вложено в L_r^2, построенное как замыкание $u(r) \in C^\infty[0,1]$ по норме $\|u\|^2 = \int\limits_0^1 r\,dr\,|u|^2$. Проще всего это доказать при помощи преобразования Бесселя, следуя И. А. Киприянову [5]. Тогда задача (5) может быть переписана в виде

$$u_n = Af_n, \quad u_n \in W_r^2,$$

где A — компактный оператор, поэтому из последовательности $\{u_n\}$, отвечающей ограниченной в L_r^2 последовательности $\{f_n\}$, можно извлечь сходящуюся в W_r^2 подпоследовательность. Следовательно, если последовательность $\{X_n\} \in W^1$ ограничена: $\|X_n\|_1^2 \leqslant C$, то и $\|\operatorname{div} H_{-n}\|_{L^2}^2 \leqslant C$, $\|E_{zn}\|_{L^2}^2 \leqslant C$, $\|\operatorname{grad} E_{zn}\|_{L^2}^2 \leqslant C$. Поэтому из отвечающих $\{X_n\} \in W^1$ последовательностей $\{\chi_n\}$, $\{\psi_n\}$, $\{E_{zn}\}$ можно извлечь сильно сходящиеся в W_r^2 подпоследовательности $\{\chi_k\}$, $\{\psi_k\}$ и сильно сходящуюся в L_r^2 подпоследовательность $\{E_{zk}\}$. Таким образом, подпоследовательности $\{H_{-k}\} = \{\operatorname{grad}\psi_k + \operatorname{rot}\chi_k\}$ и $\{E_{zk}\}$ сходятся по норме L_r^2. Поскольку ε(r) кусочно-непрерывна и $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon(r) \geqslant \varepsilon_2$, то нормы L_r^2 и W эквивалентны, поэтому из ограниченной в W^1 последовательности можно извлечь сходящуюся в W подпоследовательность, что и требовалось доказать.

В силу теоремы Рисса и компактности вложения пространства W^1 в W существуют такие компактные на W^1 (см., напр., [6]) операторы B и A, что

$$b(X,Y) = -(Y, BX)_1, \quad (X,Y) = (Y, AX)_1.$$

Поэтому задача (4) может быть переписана в виде

$$X + BX = -\left(\gamma^2 - 1\right) AX, \quad X \in W^1. \tag{6}$$

3. Полнота системы корневых векторов

Для обоснования полноты системы корневых векторов задачи (6) покажем, что последняя удовлетворяет условиям теоремы М. В. Келдыша [7]. Для этого заметим, что A — эрмитов компактный оператор на W^1 с $\ker A = 0$ и верна следующая теорема.

Теорема 2. *Собственные значения оператора A имеют асимптотику $\lambda_n \approx n^{-2}$.*

Доказательство. Пусть $X_n \in W^1$ — собственные векторы и λ_n — собственные значения оператора A, тогда среди них есть и те, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \lambda_n \operatorname{grad}\operatorname{div} H_{-n} = H_{-n}, \\ \lambda_n \Delta_\varepsilon E_{zn} = \varepsilon E_{zn} \end{cases} \tag{7}$$

с граничными условиями $H_{rn}(1) = E_{zn}(1) = 0$, и в частности те, которые удовлетворяют одной из двух систем:

$$\begin{cases} \lambda_n \Delta\psi_n = \psi_n, \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\psi_n \Big|_{r=1} = 0, \\ \chi_n = E_{zn} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \lambda_m \Delta_\varepsilon E_{zm} = \varepsilon E_{zm}, \\ E_{zm}\Big|_{r=1} = 0, \\ \psi(r) \equiv 0, \\ \Delta\chi_m = -ikE_m, \quad \chi_m(1) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\Delta_\varepsilon\varphi = \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad}\varphi)$. В силу того что системы функций $\{\psi_n\}$, $\{\chi_m\}$, $\{E_{zm}\}$ образуют базис в L_r^2 и дифференцируемы достаточное число раз, набор χ, ψ, E_z, отвечающий любому вектору из W^1, может быть представлен в виде ряда по $\{\psi_n\}$, $\{\chi_m\}$, $\{E_{zm}\}$, т. е. $\{\psi_n\}$, $\{\chi_m\}$, $\{E_{zm}\}$ — базис на W^1, и следовательно, ими исчерпываются все собственные векторы задачи.

В задачах (8) и (9) при $\varepsilon(r) \equiv 1$ собственные значения, очевидно, растут, как квадрат номера. Оценивая собственные значения (9) в общем случае по принципу минимакса [8], получим, что и они тоже растут, как $O\left(n^2\right)$, что и требовалось доказать.

В силу теоремы Келдыша о полноте корневых векторов операторного пучка и теорем 1 и 2 получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Система корневых векторов задачи* (6) *полна в W^1.*

4. Базисность системы корневых векторов

Поскольку $\ker A = 0$, существует $G = A^{-1}$ — эрмитов оператор с компактной резольвентой, такой, что его собственные значения $\lambda_n \approx n^2$. Тогда задачу (6) можно переписать в виде

$$(I + B)\,GX = \lambda X,$$

и применить к ней теорему о базисности системы корневых векторов [9, § 6], если доказать, что оператор BG является p-подчиненным оператору G, причем $p = 1/2$, т. е. что существует $c > 0$, причем

$$\|BGx\|_1 \leqslant c\,\|Gx\|_1^p\,\|x\|_1^{1-p}.$$

Но для любого x найдется $y = Gx = A^{-1}x$, поэтому последнее неравенство является следствием неравенства

$$\|By\|_1 \leqslant c\,\|y\|_1^p\,\|Ay\|_1^{1-p} \leqslant b\,\|y\|_1^p\,\|y\|_0^{1-p}$$

при любом $y \in W^1$. С другой стороны, B — ограниченный оператор, т. е. $\|B\|_1 = b$, поэтому

$$\|By\|_1^2 \leqslant (By, By)_1 \leqslant b\,|(y, By)_1| = b\,|b\,(y)|\,.$$

Согласно п. 2,

$$|b\,(X)| \leqslant C\,\|X\|_1\,\|X\|_0\,,$$

отсюда

$$\|By\|_1^2 \leqslant b\,|b\,(y)| \leqslant Cb\,\|y\|_1\,\|y\|_0\,,$$

что и означает p-подчиненность ($p = 1/2$) оператора BG оператору G.

Остается заметить, что коль скоро $\lambda_n \approx n^2$, то для $N(r)$ — суммы кратностей всех собственных значений G, меньших r, — имеет место соотношение

$$\mathrm{const}\cdot N^2 = r \quad \text{или} \quad \lim_{r=\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} N\,(r) < \infty.$$

Но это означает, что выполнены все условия теоремы о базисности корневых векторов пучка Келдыша, поэтому верна следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Система корневых векторов задачи* (6) *образует безусловный базис со скобками в* W^1.

Эта теорема позволяет завершить обоснование метода нормальных волн для данного класса радиоволноводов [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 00-01-00111).

Литература

1. *Краснушкин П.Е., Моисеев Е.И.* // ДАН СССР. 1982. **264**, № 5. С. 1123.
2. *Смирнов Ю.Г.* // Дифф. уравнения. 1991. **27**, № 1. С. 140.
3. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г.* // Докл. РАН. 1999. **369**, № 4. С. 1.
4. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г.* // ЖВМ и МФ. 1999. **39**, № 11. С. 1869.
5. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.
6. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
7. *Келдыш М.В.* Избранные труды. Математика. М.: Наука, 1985.
8. *Гильберт Д., Курант Р.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.
9. *Маркус А.С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных пучков. Кишинев: Штиница, 1986.

Поступила в редакцию
29.03.00

УДК 530.145

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УДЕРЖИВАЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА

О. С. Павлова, А. Р. Френкин

(*кафедра теоретической физики;
кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Методом интегральных преобразований находится энергетический спектр радиального уравнения Шрёдингера с удерживающим потенциалом степенного роста на бесконечности. Задача сведена к приближенному решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. С помощью численных расчетов определен спектр S-состояния уравнения Шрёдингера с линейно растущим потенциалом.

Одной из важных задач квантовой физики является нахождение энергетического спектра уравнения Шрёдингера (УШ) с локальными удерживающими потенциалами. Однако радиальное УШ с произвольным орбитальным квантовым числом $l = 0, 1, \ldots$ имеет точное решение только для одного потенциала такого рода — осцилляторного (в том числе и для его комбинации с потенциалом $1/r^2$) и некоторых его модификаций, которые, например, могут быть получены методом обратной задачи квантовой теории рассеяния [1]. Поэтому очень важны разработки новых приближенных методов нахождения спектра УШ с удерживающими потенциалами более сложного вида.

В данной работе мы определяем спектр УШ с физическим потенциалом

$$V(r) = ar^K - \frac{Z}{r} + \frac{A}{r^2}, \quad a > 0, \quad K = 1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

который представляет собой комбинацию удерживающего потенциала степенного роста, дальнодействующих кулоновского потенциала и потенциала вида $1/r^2$. При этом мы используем метод интегральных преобразований, примененный в работах [2–4].

Рассмотрим радиальное уравнение Шрёдингера (УШ) (выбрано $2m = 1$, $\hbar = 1$) с удерживающим потенциалом (1):

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} - ar^K\Psi - \frac{l(l+1) + A}{r^2}\Psi + \frac{Z}{r}\Psi + \mathcal{E}\Psi = 0, \qquad (2)$$