при любом $y \in W^1$. С другой стороны, B — ограниченный оператор, т.е. $\|B\|_1 = b$, поэтому

$$\|By\|_1^2 \leqslant (By, By)_1 \leqslant b\,|(y, By)_1| = b\,|b\,(y)|\,.$$

Согласно п. 2,

$$|b\,(X)| \leqslant C\,\|X\|_1\,\|X\|_0\,,$$

отсюда

$$\|By\|_1^2 \leqslant b\,|b\,(y)| \leqslant Cb\,\|y\|_1\,\|y\|_0\,,$$

что и означает p-подчиненность ($p = 1/2$) оператора BG оператору G.

Остается заметить, что коль скоро $\lambda_n \approx n^2$, то для $N(r)$ — суммы кратностей всех собственных значений G, меньших r, — имеет место соотношение

$$\mathrm{const}\cdot N^2 = r \quad \text{или} \quad \lim_{r=\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} N\,(r) < \infty.$$

Но это означает, что выполнены все условия теоремы о базисности корневых векторов пучка Келдыша, поэтому верна следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Система корневых векторов задачи* (6) *образует безусловный базис со скобками в* W^1.

Эта теорема позволяет завершить обоснование метода нормальных волн для данного класса радиоволноводов [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 00-01-00111).

Литература

1. *Краснушкин П.Е., Моисеев Е.И.* // ДАН СССР. 1982. **264**, № 5. С. 1123.
2. *Смирнов Ю.Г.* // Дифф. уравнения. 1991. **27**, № 1. С. 140.
3. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г.* // Докл. РАН. 1999. **369**, № 4. С. 1.
4. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г.* // ЖВМ и МФ. 1999. **39**, № 11. С. 1869.
5. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.
6. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
7. *Келдыш М.В.* Избранные труды. Математика. М.: Наука, 1985.
8. *Гильберт Д., Курант Р.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.
9. *Маркус А.С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных пучков. Кишинев: Штиница, 1986.

Поступила в редакцию
29.03.00

УДК 530.145

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УДЕРЖИВАЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА

О. С. Павлова, А. Р. Френкин

(*кафедра теоретической физики;
кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Методом интегральных преобразований находится энергетический спектр радиального уравнения Шрёдингера с удерживающим потенциалом степенного роста на бесконечности. Задача сведена к приближенному решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. С помощью численных расчетов определен спектр S-состояния уравнения Шрёдингера с линейно растущим потенциалом.

Одной из важных задач квантовой физики является нахождение энергетического спектра уравнения Шрёдингера (УШ) с локальными удерживающими потенциалами. Однако радиальное УШ с произвольным орбитальным квантовым числом $l = 0, 1, \ldots$ имеет точное решение только для одного потенциала такого рода — осцилляторного (в том числе и для его комбинации с потенциалом $1/r^2$) и некоторых его модификаций, которые, например, могут быть получены методом обратной задачи квантовой теории рассеяния [1]. Поэтому очень важны разработки новых приближенных методов нахождения спектра УШ с удерживающими потенциалами более сложного вида.

В данной работе мы определяем спектр УШ с физическим потенциалом

$$V(r) = ar^K - \frac{Z}{r} + \frac{A}{r^2}, \quad a > 0, \quad K = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

который представляет собой комбинацию удерживающего потенциала степенного роста, дальнодействующих кулоновского потенциала и потенциала вида $1/r^2$. При этом мы используем метод интегральных преобразований, примененный в работах [2–4].

Рассмотрим радиальное уравнение Шрёдингера (УШ) (выбрано $2m = 1$, $\hbar = 1$) с удерживающим потенциалом (1):

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} - ar^K\Psi - \frac{l(l+1) + A}{r^2}\Psi + \frac{Z}{r}\Psi + \mathcal{E}\Psi = 0, \tag{2}$$

которое при $A > -(2l+1)^2/4$ (l фиксировано) имеет дискретный спектр энергий с бесконечным числом уровней $\mathcal{E}_n$, $n = 0, 1, \ldots$.

Введем новую переменную $x = a^{1/2} r^{\nu}/\nu$, $\nu = 1 + K/2$, и обозначим $B = A + l(l+1)$, $z = a^{-1/2\nu} Z$, $E = a^{-1/\nu}\mathcal{E}$, тогда УШ (2) принимает вид

$$\nu x\Big(\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \Psi\Big) + (\nu - 1)\frac{d\Psi}{dx} - \frac{B}{\nu x}\Psi + \\ + z(\nu x)^{-1+1/\nu}\Psi + E(\nu x)^{-1+2/\nu}\Psi = 0. \qquad (3)$$

Если определен спектр уравнения (3), то при заданных значениях параметров Z, ν, a уровни энергии УШ (2) определяются формулой

$$\mathcal{E}_n(a, Z, \nu) = a^{1/\nu} E_n(a^{-1/2\nu} Z, \nu). \qquad (4)$$

Квадратично-интегрируемые решения УШ (3) имеют следующее поведение в нуле и на бесконечности:

$$\Psi(x) \sim x^{\beta} \quad \text{при} \quad x \to 0,$$
$$\Psi(x) \sim \mathrm{e}^{-x} \quad \text{при} \quad x \to \infty, \qquad (5)$$
$$\beta = \frac{1}{2\nu}(1 + \sqrt{1+4B}).$$

Следуя работе [4], применим к УШ (3) обобщенное преобразование Лапласа вида

$$<\varphi> = \frac{\omega^{-2\alpha}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x/\omega}\,\varphi(x) x^{\sigma-1} dx, \qquad (6)$$

где $\sigma = \beta + 1 - 1/\nu$, $\alpha = (\beta+\sigma)/2 = (\nu + \sqrt{1+4B})/2\nu$.

Подобно работам [2–4], спектр УШ будем определять из условия регулярности функции $\Phi(\omega) \equiv <\Psi>$ в точке $\omega = 1$.

УШ в лапласовском представлении может быть записано в виде

$$(1-\omega^2)\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} - 2\alpha\omega\Phi(\omega) + \frac{E}{2}\delta_{\nu 2}\Phi(\omega) = \\ = -(1-\delta_{\nu 2})E\nu^{-2+2/\nu} <x^{-1+2/\nu}\Psi> - \\ - z\nu^{-1+1/\nu} <x^{-1+1/\nu}\Psi>, \qquad (7)$$

где специально выделен случай $K = 2$ (т.е. $\nu = 2$), когда функция $<x^{-1+2/\nu}\Psi> = \Phi(\omega)$, и обозначено $\delta_{\nu 2} = \begin{cases} 1 \text{ для } \nu = 2, \\ 0 \text{ для } \nu \neq 2. \end{cases}$

После подстановки в уравнение (7) интегральных представлений функций $<x^{-1+1/\nu}\Psi>$ и $<x^{-1+2/\nu}\Psi>$, найденных в работе [4], основное уравнение задачи принимает вид

$$(1-\omega^2)\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} - 2\alpha\omega\Phi(\omega) + \frac{E}{2}\delta_{\nu 2}\Phi(\omega) = \\ = \frac{z\nu^{-2+1/\nu}\omega^{-1+1/\nu}}{\Gamma(1-1/\nu)}\int\limits_0^1 (1-t)^{-1/\nu} t^{2\alpha-2+1/\nu}\Phi(t\omega)dt - \\ -(1-\delta_{\nu 2})\frac{E\nu^{-2+2/\nu}\omega^{-1+2/\nu}}{\Gamma(1-2/\nu)}\times \\ \times \int\limits_0^1 (1-t)^{-2/\nu} t^{2\alpha-2+2/\nu}\Phi(t\omega)dt. \qquad (8)$$

Перейдем в уравнении (8) к новой переменной $y = (1-\omega)/(1+\omega)$. Тогда точке $\omega = 1$ соответствует точка $y = 0$. Поэтому спектр задачи определяется из требования регулярности функции $\tilde{\Phi}(y) \equiv \Phi(\omega)$ в точке $y = 0$ [2–4].

Удобно представить функцию $\tilde{\Phi}(y)$ в виде [4, 5]

$$\tilde{\Phi}(y) = 2^{-2\alpha}(1+y)^{2\alpha} D(y), \qquad (9)$$

причем функция $D(y)$ (как и функция $\tilde{\Phi}(y)$) для квадратично-интегрируемых решений УШ может быть разложена в ряд по степеням y: $D(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$.

Замена переменных в (8) $\omega = (1-y)/(1+y)$, $\omega t = (1-v)/(1+v)$ и подстановка представления (9) приводят к уравнению

$$y\frac{dD}{dy} + \Big(\alpha - \frac{E}{4}\delta_{\nu 2}\Big)D = E(1-\delta_{\nu 2})I\Big(\frac{2}{\nu}, y\Big) + zI\Big(\frac{1}{\nu}, y\Big), \qquad (10)$$

где

$$I(\epsilon, y) = \frac{2^{-\epsilon}\nu^{\epsilon-2}}{\Gamma(1-\epsilon)}(1-y)^{\epsilon-2\alpha}\times \\ \times \int\limits_y^1 (1-v)^{2\alpha+\epsilon-2}(v-y)^{-\epsilon} D(v)dv. \qquad (11)$$

Входящая в правую часть уравнения (10) функция $I(\epsilon, y)$ (при $\epsilon = 2/\nu$, $\epsilon = 1/\nu$) также может быть разложена в ряд по степеням y: $I(\epsilon, y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} I_n(\epsilon) y^n$. Тогда основное уравнение задачи (10) сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно величин a_n:

$$\Big(n + \alpha - \frac{E}{4}\delta_{\nu 2}\Big)a_n = (1-\delta_{\nu 2})EI_n\Big(\frac{2}{\nu}\Big) + zI_n\Big(\frac{1}{\nu}\Big). \qquad (12)$$

Значения коэффициентов разложения $I_n(\epsilon)$ можно получить с помощью прямого и обратного преобразования Меллина, как делалось, например, в работе [2] для четных одномерных потенциалов, при этом такой расчет хотя и несложен, но весьма утомителен. Однако выражение $I_n(\epsilon)$ (в несколько ином представлении) может быть получено чрезвычайно простым способом, который мы здесь приводим.

Вводя новую переменную $\xi = (1-v)/(1-y)$ в интеграле (11) и записав $D(v) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k$, можно представить выражение для $I(\epsilon, y)$ в виде

$$I(\epsilon, y) = \frac{2^{-\epsilon}\nu^{\epsilon-2}}{\Gamma(1-\epsilon)}(1-y)^{\epsilon-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \times \\ \times \int_0^1 \xi^{2\alpha+\epsilon-2}(1-\xi)^{-\epsilon}[1-(1-y)\xi]^k d\xi. \quad (13)$$

Учитывая, что $(1-y)\xi \leqslant 1$, можно воспользоваться разложением

$$[1-(1-y)\xi]^k = \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m k!(1-y)^m}{m!\Gamma(k-m+1)}\xi^m,$$

тогда формула (13) принимает вид

$$I(\epsilon, y) = \frac{2^{-\epsilon}\nu^{\epsilon-2}}{\Gamma(1-\epsilon)}\sum_{k=0}^{\infty} a_k k! \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m(1-y)^{m+\epsilon-1}}{m!(k-m)!}\times \\ \times \int_0^1 \xi^{2\alpha+m+\epsilon-2}(1-\xi)^{-\epsilon}d\xi = \\ = 2^{-\epsilon}\nu^{\epsilon-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k k! \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m(1-y)^{m+\epsilon-1}}{m!(k-m)!}\times \\ \times \frac{\Gamma(2\alpha+m+\epsilon-1)}{\Gamma(2\alpha+m)}.$$

Отсюда, разложив множитель $(1-y)^{m+\epsilon-1}$ по степеням y, получаем окончательную формулу для величины $I_n(\epsilon)$:

$$I_n(\epsilon) = 2^{-\epsilon}\nu^{\epsilon-2}\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty} a_k k! \times \\ \times \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m\Gamma(m+\epsilon)\Gamma(2\alpha+m+\epsilon-1)}{m!(k-m)!\Gamma(m+\epsilon-n)\Gamma(2\alpha+m)}. \quad (14)$$

Теперь основное уравнение задачи (12) может быть записано в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{\mathcal{B}_{nk} + [E\delta_{\nu 2} - 4(n+\alpha)\delta_{nk}]\}a_k = 0, \quad (15)$$

где

$$\mathcal{B}_{nk} = E(1-\delta_{\nu 2})B_{nk}\left(\frac{2}{\nu}\right) + zB_{nk}\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

$$B_{nk}(\epsilon) = 2^{-\epsilon+2}\nu^{\epsilon-2}\frac{(-1)^n k!}{n!}\times \\ \times \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m}{m!(k-m)!}\frac{\Gamma(m+\epsilon)\Gamma(2\alpha+m+\epsilon-1)}{\Gamma(m+\epsilon-n)\Gamma(2\alpha+m)}.$$

Спектр $\mathcal{E}_n$ УШ (2) находится из характеристического уравнения

$$\det||\mathcal{B}_{nk} + [E\delta_{\nu 2} - 4(n+\alpha)\delta_{nk}]|| = 0 \quad (16)$$

с помощью формулы (4), причем при определении корней уравнения (16) бесконечная матрица $||\mathcal{B}_{nk} + [E\delta_{\nu 2} - 4(n+\alpha)\delta_{nk}]||$ заменяется конечной ранга N. Заметим, что несколько нижних уровней энергии УШ можно получить из уравнения (16) и методом теории возмущений [6]. Однако в общем случае расчет спектра может быть выполнен предложенным методом с помощью ЭВМ.

Из формулы (16) видно, что в матрице $||\mathcal{B}_{nk} + [E\delta_{\nu 2} - 4(n+\alpha)\delta_{nk}]||$ достигнута максимально возможная степень диагонализации, что связано с удачным выбором представления (9). Так, для потенциала $V(r) = r^2 + A/r^2$ в (16) присутствуют только диагональные члены матрицы, что сразу приводит к точному спектру осциллятора:

$$\mathcal{E}_{nl} = 4(n+\alpha), \quad \alpha = \frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{1+4l(l+1)+4A}\right).$$

В качестве примера возможностей предложенного метода приведем результаты расчета энергетического спектра для линейного потенциала $V(r) = r$ при $l = 0$ ($a = 1$, $\nu = 3/2$ и $E_n(N) = \mathcal{E}_n(N)$) (см. таблицу). В таблице дана зависимость пяти первых корней характеристического уравнения (16) от ранга N конечной матрицы ($N = 1, 2, \ldots, 9$) и их предельные значения, являющиеся в данном случае нулями функции Эйри $\mathrm{Ai}(x)$, которые взяты из справочника [7].

Зависимость значений уровней энергии от ранга матрицы

Ранг матрицы N	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
1	2,48400				
2	2,33836	4,83764			
3	2,33834	4,11221	7,35967		
4	2,33820	4,08925	5,67530	10,11850	
5	2,33815	4,08806	5,53325	7,24029	13,09170
6	2,33813	4,08803	5,52077	6,85138	8,87834
7	2,33812	4,08800	5,52066	6,79033	8,14081
8	2,33812	4,08798	5,52061	6,78703	7,96751
9	2,33811	4,08797	5,52060	6,78675	7,94621
Нули $\mathrm{Ai}(x)$	2,33811	4,08795	5,52056	6,78671	7,94413

Из таблицы видно, что процедура приближенного нахождения корней E_n характеристического уравнения (16) быстро сходится с ростом ранга N конечной матрицы. Так, например, уровень энергии основного состояния УШ E_0, полученный из характеристического уравнения (16), который должен совпадать с первым нулем функции Эйри $\mathrm{Ai}(x)$, определяется с точностью 5 знаков после запятой уже для ранга матрицы $N = 9$, причем вычисления на ЭВМ занимают несколько минут. Вполне естественно, что при заданном значении N нижние уровни энергии имеют бóльшую точность, так как они вычисляются в более высоком приближении. Например, рангу матрицы $N = 9$ соответствует девятое приближение корня E_0 характеристического уравнения, тогда как корень E_4 при этом вычисляется лишь в пятом приближении.

Максимально возможная диагонализация матрицы в уравнении (16) приводит еще и к тому, что корни уравнения $E_n(N)$ с ростом N монотонно (без осцилляций) приближаются к предельным значениям $E_n(\infty)$, совпадающим с нулями функции Эйри $\mathrm{Ai}(x)$.

Заметим, что в нашем подходе определение энергетического спектра УШ значительно проще и точнее, чем при использовании стандартной теории возмущений, в которой для получения подобной точности требуется проведение значительно более сложных вычислений.

В заключение отметим, что предложенный способ приближенного нахождения спектра УШ может быть использован для решения ряда практических задач ядерной физики и физики элементарных частиц. Например, один из методов исследования состояний кваркониума J/Ψ и Υ связан именно с введением межкваркового потенциала вида (1) с $K = 1$ или $K = 2$. Использование даже таких простых потенциалов дает хорошее совпадение низших состояний кварковых систем с экспериментальными данными [8]. Естественно, большей точности в совпадении с опытными данными можно ожидать при использовании удерживающих потенциалов вида $V(r) = ar^2 + br - Z/r + A/r^2 + a_0$ (и их обобщений), которые будут рассмотрены в следующей работе.

Авторы искренне благодарны В. Ф. Березницкой за постоянное внимание и Ю. М. Лоскутову за плодотворное обсуждение полученных результатов.

Литература

1. *Гостев В.Б., Минеев В.С., Френкин А.Р.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1982. №2. С. 75 (Moscow University Phys. Bull. 1982. No. 2. P. 86).
2. *Вшивцев А.С., Норин Н.В., Сорокин В.Н.* // ТМФ. 1996. **109**, №1. С. 107.
3. *Вшивцев А.С., Вшивцев В.А., Татаринцев А.В., Френкин А.Р.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. №5. С. 61 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 5. P. 76).
4. *Павлова О.С., Френкин А.Р.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. №1. С. 58 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 1. P. 69).
5. *Павлова О.С., Баскаран Д., Френкин А.Р.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. №5. С. 14 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 5).
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1963.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
8. *Quigg C., Rosner J.L.* // Phys. Rep. 1979. **56**. P. 167.

Поступила в редакцию
03.04.00

УДК 621.383.8

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РАСЧЕТЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДЕФЛЕКТОРА С ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ

Н. Е. Шапкина

(*кафедра математики*)

Рассмотрена трехмерная математическая модель диэлектрического дефлектора с электрооптическим управлением. Предложен метод расчета электрического поля внутри кристалла дефлектора, адекватно учитывающий форму электродов. Исследована область применимости разработанной ранее двумерной модели.

Анализируемый дефлектор [1, 2] представляет собой одноосный анизотропный кристалл $LiNbO_3$, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, на противоположные грани которого симметрично нанесены электроды в виде прямоугольных треугольников (рис. 1). На электроды подается постоянное напряжение. Кристалл описывается диагональным тензором ε диэлектрической проницаемости: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_x$; $\varepsilon_{33} = \varepsilon_z$.

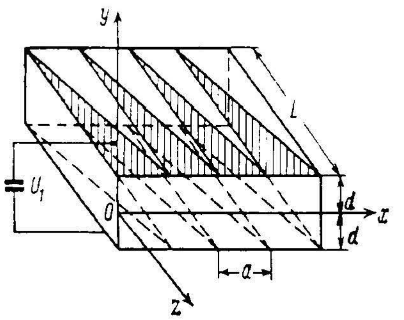

Рис. 1. Общий вид электрооптического дефлектора

В работах [3, 4] было рассчитано электрическое поле для случая бесконечной периодической дифракционной решетки, состоящей из лент бесконечной длины и постоянной ширины. Это позволило свести трехмерную задачу к ансамблю двумерных задач, каждая из которых относится к лентам определенной ширины. Такой подход дает возможность при-