

матрицы  $N = 9$ , причем вычисления на ЭВМ занимают несколько минут. Вполне естественно, что при заданном значении  $N$  нижние уровни энергии имеют большую точность, так как они вычисляются в более высоком приближении. Например, рангу матрицы  $N = 9$  соответствует девятое приближение корня  $E_0$  характеристического уравнения, тогда как корень  $E_4$  при этом вычисляется лишь в пятом приближении.

Максимально возможная диагонализация матрицы в уравнении (16) приводит еще и к тому, что корни уравнения  $E_n(N)$  с ростом  $N$  монотонно (без осцилляций) приближаются к предельным значениям  $E_n(\infty)$ , совпадающим с нулями функции Эйри  $Ai(x)$ .

Заметим, что в нашем подходе определение энергетического спектра УШ значительно проще и точнее, чем при использовании стандартной теории возмущений, в которой для получения подобной точности требуется проведение значительно более сложных вычислений.

В заключение отметим, что предложенный способ приближенного нахождения спектра УШ может быть использован для решения ряда практических задач ядерной физики и физики элементарных частиц. Например, один из методов исследования состояний кваркония  $J/\Psi$  и  $\Upsilon$  связан именно с введением межкваркового потенциала вида (1) с  $K = 1$  или  $K = 2$ . Использование даже таких простых потенциалов дает хорошее совпадение низших состояний кварковых систем с экспериментальными данными [8]. Естественно, большей точности в совпадении с опытными данными можно ожидать

при использовании удерживающих потенциалов вида  $V(r) = ar^2 + br - Z/r + A/r^2 + a_0$  (и их обобщений), которые будут рассмотрены в следующей работе.

Авторы искренне благодарны В. Ф. Березницкой за постоянное внимание и Ю. М. Лоскутову за плодотворное обсуждение полученных результатов.

#### Литература

1. Гостев В.Б., Минеев В.С., Френкин А.Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1982. №2. С. 75 (Moscow University Phys. Bull. 1982. No. 2. P. 86).
2. Вишвецев А.С., Норин Н.В., Сорокин В.Н. // ТМФ. 1996. 109, №1. С. 107.
3. Вишвецев А.С., Вишвецев В.А., Татаринцев А.В., Френкин А.Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. №5. С. 61 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 5. P. 76).
4. Павлова О.С., Френкин А.Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. №1. С. 58 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 1. P. 69).
5. Павлова О.С., Баскаран Д., Френкин А.Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. №5. С. 14 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 5).
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1963.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
8. Quigg C., Rosner J.L. // Phys. Rep. 1979. 56. P. 167.

Поступила в редакцию  
03.04.00

УДК 621.383.8

## МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РАСЧЕТЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДЕФЛЕКТОРА С ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ

Н. Е. Шапкина

(кафедра математики)

Рассмотрена трехмерная математическая модель диэлектрического дефлектора с электрооптическим управлением. Предложен метод расчета электрического поля внутри кристалла дефлектора, адекватно учитывающий форму электродов. Исследована область применимости разработанной ранее двумерной модели.

Анализируемый дефлектор [1, 2] представляет собой одноосный анизотропный кристалл  $LiNbO_3$ , имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, на противоположные грани которого симметрично нанесены электроды в виде прямоугольных треугольников (рис. 1). На электроды подается постоянное напряжение. Кристалл описывается диагональным тензором  $\epsilon$  диэлектрической проницаемости:  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_x$ ;  $\epsilon_{33} = \epsilon_z$ .

В работах [3, 4] было рассчитано электрическое поле для случая бесконечной периодической дифракционной решетки, состоящей из лент бесконечной длины и постоянной ширины. Это позволило свести трехмерную задачу к ансамблю двумерных задач,

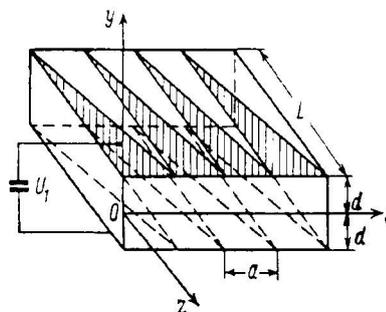


Рис. 1. Общий вид электрооптического дефлектора

каждая из которых относится к лентам определенной ширины. Такой подход дает возможность при-

ближенно рассчитать один из основных параметров дефлектора — фазовый набег световой волны в кристалле.

Важность этой характеристики делает актуальной разработку метода решения задачи в трехмерном варианте с адекватным учетом формы электродов, что также дает возможность оценить область применимости двумерной модели.

*Постановка задачи:* требуется найти электростатическое поле внутри кристалла, удовлетворяющее на границе кристалла условиям сопряжения; потенциал на электродах полагается постоянным и заранее заданным.

Трехмерная задача сводится к интегральному уравнению для плотности заряда на электродах, которое впоследствии решается численно. (Краткое сообщение о трехмерной модели дано в работе [5].) Ядром интегрального уравнения является функция Грина, представляющая собой потенциал, создаваемый двумя разноименными точечными зарядами с координатами  $x_0, y_0, z = \pm d$ , где  $2d$  — толщина кристалла. Чтобы найти функцию Грина, поместим заряды в точки  $x_0, y_0, z = \pm z_0$  внутри кристалла. Потенциал зарядов удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\varepsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \delta(x-x_0) \delta(z-z_0) \delta(y-y_0),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

внутри и вне кристалла соответственно, а также следующим условиям сопряжения на границе:

$$1) u|_{z=d-0} = u|_{z=d+0}; \quad 2) \varepsilon_z u_z|_{z=d-0} = u_z|_{z=d+0}. \quad (2)$$

Приведенный выше вид тензора  $\varepsilon$  позволяет перейти к цилиндрическим координатам, в которых уравнение Пуассона запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \delta(r-r_0) \delta(z-z_0) \delta(\varphi-\varphi_0) / (r\varepsilon_0\varepsilon_x), \quad (3)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_z/\varepsilon_x$ ,  $r_0, \varphi_0, z_0$  — координаты зарядов. Будем искать решение в виде разложения в ряд Фурье по  $\varphi$  и в интеграл Фурье–Бесселя по  $r$ :

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} W_n(\chi, z) J_n(\chi r) e^{in\varphi} \chi d\chi, \quad (4)$$

где  $J_n(\chi r)$  — функции Бесселя  $n$ -го порядка. Обозначим

$$B_n = \int_0^{\infty} W_n(\chi, z) J_n(\chi r) \chi d\chi. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (3) и учитывая (5), находим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial^2 B_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} B_n + \varepsilon \frac{\partial^2 B_n}{\partial z^2} \right) e^{in\varphi} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_x} \delta(r-r_0) \delta(z-z_0) \frac{\delta(\varphi-\varphi_0)}{r},$$

откуда, пользуясь свойствами  $\delta$ -функций и функций Бесселя [7], можно получить уравнение

$$\chi'^2 W_n(\chi', z) + \varepsilon \frac{\partial^2 W_n(\chi', z)}{\partial z^2} = L_n J_n(\chi' r_0) \delta(z-z_0), \quad (6)$$

$$L_n = \frac{1}{2\pi \varepsilon'} e^{-in\varphi_0}.$$

Разделив обе части (6) на  $\varepsilon$  и обозначая  $\chi^2 \varepsilon = \sigma^2$ , получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 W_n}{\partial z^2} - \sigma^2 W_n = L_n J_n(\chi r_0) \delta(z-z_0). \quad (7)$$

В силу равенства нулю потенциала при  $z = 0$  решением однородного уравнения, соответствующего (7), будет  $W_n = C_n \text{sh}(\sigma z)$ . Будем искать частное решение в виде  $W_n^0 = A \text{sh}(\sigma z) \text{ch}(\sigma z_0)$  при  $z < z_0$  и  $W_n^0 = A \text{ch}(\sigma z) \text{sh}(\sigma z_0)$  при  $z > z_0$ , где  $A$  — неизвестный коэффициент.

Подставляя  $W_n^0$  в (7), интегрируя результат подстановки по  $z$  от  $z-\nu$  до  $z+\nu$ :

$$A \frac{\partial W_n^0}{\partial z} \Big|_{z_0-\nu}^{z_0+\nu} - \sigma^2 A \int_{z_0-\nu}^{z_0+\nu} W_n^0 dz = L_n \frac{\exp\{in\varphi_0\} J_n(\chi r_0)}{2\pi \varepsilon'} \int_{z_0-\nu}^{z_0+\nu} \delta(z-z_0) dz$$

и учитывая свойства  $\delta$ -функции [6] и вид  $W_n^0$ , при  $\nu \rightarrow 0$  получим

$$W_n^0 = \begin{cases} -L_n \text{sh}(\sigma z) \text{ch}(\sigma z_0) / \sigma & (z < z_0), \\ -L_n \text{ch}(\sigma z) \text{sh}(\sigma z_0) / \sigma & (z > z_0). \end{cases} \quad (8)$$

Тогда общее решение во внутренней области имеет вид  $W_n = C_n \text{sh}(\sigma z) + W_n^0$ , где второе слагаемое определяется выражением (8).

Теперь рассмотрим внешнюю область. Здесь  $\Delta u = 0$ , поскольку заряд находится внутри кристалла. Как и во внутренней области, ищем решение в виде

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} V_n(\chi, z) J_n(\chi r) e^{in\varphi} \chi d\chi. \quad (9)$$

После преобразований, аналогичных преобразованиям для  $W_n$  во внутренней области, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} - \chi^2 V_n = 0. \quad (10)$$

С учетом ограниченности  $V_n$  на бесконечности получаем решение  $V_n(z) = D_n e^{-\kappa z}$ . Исходя из разложений в ряд (4) и (9), условия на границе кристалла (2) можно преобразовать следующим образом:  $W_n = V_n$ ;  $\epsilon_z W'_n = V'_n$ .

Поскольку заряд находится внутри кристалла, то  $d > z_0$  и

$$C_n \operatorname{sh}(\sigma d) - (L/\sigma) \operatorname{ch}(\sigma d) \operatorname{sh}(\sigma z_0) = D_n e^{-\kappa d},$$

$$\epsilon_z \sigma C_n \operatorname{ch}(\sigma d) - L \epsilon_z \operatorname{sh}(\sigma d) \operatorname{sh}(\sigma z_0) = -\kappa D_n e^{-\kappa d}.$$

Находя из этой системы уравнений  $C_n$  и  $D_n$  и подставляя их в выражения для  $W_n$  и  $V_n$ , получим

$$W_n = \frac{L_n \operatorname{sh}(\sigma z_0) [\epsilon_z \operatorname{sh}(\sigma d) + \sqrt{\epsilon} \operatorname{ch}(\sigma d)]}{\kappa \operatorname{sh}(\sigma d) + \epsilon_z \sigma \operatorname{ch}(\sigma d)} \operatorname{sh}(\sigma z) + W_n^0,$$

$$V_n = \frac{L_n \operatorname{sh}(\sigma z_0) \epsilon_z \exp(\kappa d - \kappa z)}{\kappa \operatorname{sh}(\sigma d) + \epsilon_z \sigma \operatorname{ch}(\sigma d)}.$$

Для того чтобы найти функцию Грина, надо поместить заряд на поверхность кристалла, т.е. положить  $z_0 = d$ . Тогда, подставляя  $L_n$  из (6), имеем:

$$W_n = V_n = \frac{\exp(-i\varphi_0 n) J_n(\kappa r_0) \operatorname{sh}(\sigma d)}{2\pi\epsilon_0 [\kappa \operatorname{sh}(\sigma d) + \epsilon_z \sigma \operatorname{ch}(\sigma d)]}. \quad (11)$$

Таким образом, потенциал точечного заряда (4) и есть функция Грина, в которой  $W_n(\kappa, d)$  находится из (11). Переместим начало координат в точку  $r_0$ , т.е. устремим  $r_0$  к нулю. Тогда, учитывая, что  $J_n(\kappa r_0) = 0$  ( $n \neq 0$ ), получим

$$G(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\infty J_0(\kappa r) \frac{\operatorname{sh}(\sigma d)}{\operatorname{sh}(\sigma d) + \sqrt{\epsilon_x \epsilon_z} \operatorname{ch}(\sigma d)} \kappa d\kappa, \quad \sigma = \kappa/\sqrt{\epsilon}. \quad (12)$$

Функция Грина играет роль ядра интегрального уравнения, эквивалентного рассматриваемой задаче. Для расчетов целесообразно свести интеграл (12) к выражению, не содержащему специальных функций. Для этого разложим спектральную функцию в (12) в ряд относительно переменной  $t = e^{\sigma d}$ . После интегрирования получим выражение для функции Грина задачи (1) в виде ряда без специальных функций:

$$G = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} (1 + \sqrt{\epsilon_z \epsilon_x}) \times \left[ \frac{1}{r} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \beta^n}{\sqrt{\left(\frac{2nz'}{\sqrt{\epsilon}}\right)^2 + r^2}} \right]. \quad (13)$$

Найденная функция Грина позволяет составить интегральное уравнение относительно плотности распределения заряда на металлическом электроде произвольной формы, нанесенном на поверхность

электрооптического кристалла. Потенциал заряда, распределенного по электродам, представляется в виде

$$u(p) = \iint_S \rho(q) G(r_{pq}) ds_q, \quad (14)$$

где  $S$  — поверхность электродов на верхней грани кристалла,  $p$  и  $q$  — точки наблюдения и истока соответственно. На электрод подается постоянный потенциал, равный  $U/2$ . Тогда получаем следующее интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\iint_S \rho(q) G(r_{pq}) ds_q = \frac{U}{2}. \quad (15)$$

Уравнение первого рода в общем случае является некорректно поставленной задачей, однако за счет наличия у ядра особенности типа  $1/r$  решение устойчиво, т.е. имеет место процесс саморегуляризации. Решением уравнения (15) будет распределение плотности заряда на электродах. Далее с помощью (14) нетрудно найти потенциал электрического поля в любой точке внутри кристалла, а по нему и напряженность поля для определения фазовой задержки.

Для численного решения интегрального уравнения используется метод коллокации [8]: поверхность электродов разбивается на конечное число треугольных и прямоугольных элементов  $\Delta S_i$ . Предполагается, что плотность заряда постоянна на каждом элементарном участке площади. Затем точка наблюдения  $p$  последовательно помещается в центр каждого из элементов. Таким путем уравнение для плотности заряда сводится к системе линейных алгебраических уравнений, в которых элементами матрицы системы  $a_{ij}$  являются интегралы  $\int_{\Delta S_j} G(p_i, q) ds$ . Их удается

найти аналитически, интегрируя каждый член ряда (13) и затем суммируя проинтегрированный ряд. Почленное интегрирование возможно, так как исходный ряд сходится равномерно во всей области определения.

Система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \rho_j = U/2, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

Размерность матрицы для каждого зубца электрода равна  $n(n+1)/2$ , где  $n$  — число точек разбиения вдоль катета в методе коллокации. Решая систему, находим распределение заряда на электродах. После этого определяется распределение потенциала электрического поля внутри кристалла:

$$u(r, z) = \iint_S \rho G_1(r, z) ds = \sum_i \rho_i \iint_{S_i} G_1(r, z) ds, \quad (17)$$

где

$$G_1(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} W_n(\chi, z) J_n(\chi r) e^{in\varphi} \chi d\chi.$$

Здесь функция  $G_1$  отличается от функции (13) тем, что точка  $z$  не лежит на поверхности, т.е.  $z \neq d$ , а занимает произвольное положение внутри кристалла.

После преобразований, аналогичных преобразованиям функции Грина  $G$ , получим вид функции  $G_1$  в виде ряда:

$$G_1(r, z) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(1 + \sqrt{\epsilon_z \epsilon_x})} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ \left( \frac{(2n+1)z_1 - z}{\sqrt{\epsilon}} \right)^2 + r^2 \right]^{-1/2} - \left[ \left( \frac{(2n+1)z_1 + z}{\sqrt{\epsilon}} \right)^2 + r^2 \right]^{-1/2} \right\} \beta^n. \quad (18)$$

С помощью (17) и (18) рассчитывается потенциал, а значит, и напряженность поля. Знание последней позволяет рассчитать интеграл фазовой задержки  $\int_0^l E_z dy$ , который является самой важной характеристикой дифракционной отклоняющей системы.

Элементарными площадками при разбиении электродов в силу формы электрода рассматриваемого дефлектора были выбраны прямоугольники и треугольники. Однако практически любая форма электрода хорошо аппроксимируется с помощью подобного разбиения.

Интегралы по любым элементарным площадкам интегрирования, которые определяются при интегрировании ряда для функций  $G$  и  $G_1$ , вычисляются аналитически. Проинтегрированный ряд суммируется численно и сходится достаточно быстро, к тому же ряд допускает улучшение его сходимости.

Алгоритм был реализован на языке Microsoft FORTRAN. Относительная точность вычисления для рядов задавалась равной  $10^{-7}$ .

Разработанная математическая модель дефлектора практически адекватна реальной структуре. Применение трехмерной модели дает возможность проверить результаты расчетов, которые основаны на более грубой модели, базирующейся на решении двумерной задачи [3]. Результаты, полученные с помощью двумерной и трехмерной моделей для интеграла фазовой задержки  $\Gamma = \int_0^l E_z dy$ , достаточно близки (рис. 2).

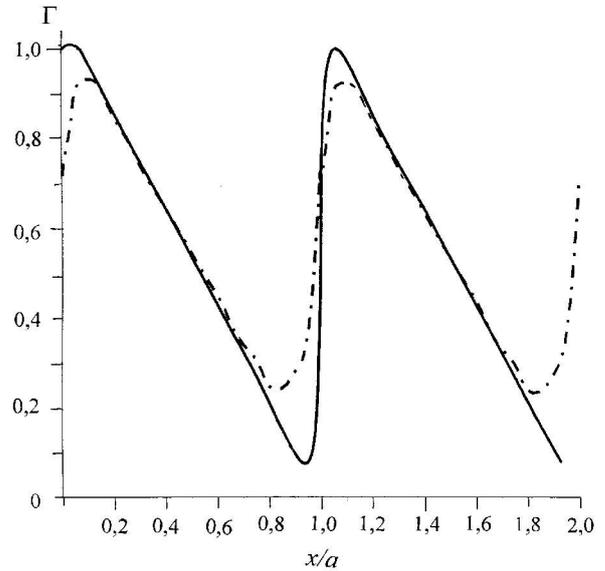


Рис. 2. Зависимость фазовой задержки  $\Gamma$  от нормированной координаты  $x/a$ , рассчитанной по трехмерной модели (сплошная линия) и по двумерной (пунктир)

Таким образом, показано, что приближенная модель на основе метода задачи Римана–Гильберта (при количестве зубцов фазовой решетки порядка 10 [3]) применима с хорошей точностью для решения данной задачи. При исследовании электрического поля вблизи острия электродов целесообразно применить трехмерную модель, более точно учитывающую краевые эффекты.

Автор приносит глубокую благодарность А.Г. Свешникову и Е.Р. Мустель за постановку задачи и обсуждение результатов и В.П. Моденову за постоянное внимание к работе.

#### Литература

1. Yuichi Ninomiya // IEEE J. Quant. Electron. 1974. No. 3. P. 358.
2. Дианова В.А., Кузнеценко А.П., Мустель Е.Р. // Квант. электроника. 1980. 7, №3. С. 649.
3. Дианова В.А., Мустель Е.Р., Свешников А.Г., Шапкина Н.Е. // Радиотехн. и электроника. 1982. №10. С. 2016.
4. Шапкина Н.Е. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1983. №1. С. 11.
5. Шапкина Н.Е. // Четвертое Международное совещание-семинар «Инженерно-физические проблемы новой техники» (21–23 мая 1996 г.): Тезисы докладов. М.: Изд-во МГТУ, 1996. С. 89.
6. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов. М.: Наука, 1977.
7. Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.

Поступила в редакцию  
19.04.00