УДК 517.947.42

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ВНЕ ДУГИ ОКРУЖНОСТИ

А. И. Сгибнев, П. А. Крутицкий

(*кафедра математики*)

Построено явное решение краевой задачи для гармонической функции вне разреза, лежащего на дуге окружности. На одном берегу разреза задано условие Дирихле, а на другом — условие Неймана. Решение задачи основано на ее сведении к задаче Римана–Гильберта.

Постановка задачи и теорема единственности

На плоскости (x_1, x_2) введем полярные координаты $x_1 = r\cos\theta$, $\quad x_2 = r\sin\theta$. Угол θ возрастает в направлении против часовой стрелки. Рассмотрим разрез L, представляющий собой дугу единичной окружности: $L = \{r = 1, \quad \theta \in (a, b)\}$, где a, b — концы контура L, $0 \leqslant a < b < 2\pi$. Определим левый и правый берега разреза L: $L^+ = \{r = 1 - 0,\ \theta \in (a, b)\}$ — левый берег, $L^- = \{r = 1 + 0,\ \theta \in (a, b)\}$ — правый берег. Далее индексами «$-$» и «$+$» у функций обозначим предельные значения этих функций на L при подходе к правому и левому берегу соответственно.

Определим класс гладкости H_L^0. Будем говорить, что функция $u(x)$ принадлежит классу H_L^0, если выполняются следующие условия:

а) $u(x)$ непрерывна вне L, непрерывно продолжима на L слева и справа во всех точках, а также непрерывно продолжима на концы L;

б) частные производные u_{x_1}, u_{x_2} непрерывны вне L, непрерывно продолжимы на L слева и справа всюду, за исключением, быть может, концов L, в которых эти функции могут иметь интегрируемые особенности, т.е. при $|x - d| \to 0$ справедлива оценка $|u_{x_1}|, |u_{x_2}| < c|x - d|^{-1+\varepsilon}$, где c, ε — некоторые положительные постоянные, $d = (\cos a, \sin a)$ либо $d = (\cos b, \sin b)$.

Дадим строгую математическую постановку задачи.

З а д а ч а $\mathcal{K}$. Найти функцию $u(x)$ из класса H_L^0, гармоническую вне L и удовлетворяющую граничным условиям

$$u|_{L^+} = \widehat{Q}^+(t) \quad \text{на } L^+, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{L^-} = Q^-(t) \quad \text{на } L^- \tag{2}$$

(условия Дирихле и Неймана соответственно), где $t = \mathrm{e}^{i\theta} \in L$; функции $\widehat{Q}^+(t) \in C^{1,\lambda}(\overline{L})$ и $Q^-(t) \in C^{0,\lambda}(\overline{L})$ являются заданными и показатель Гёльдера $\lambda \in (0, 1]$. Кроме того, при $|x| \to \infty$ функция $u(x)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$u = O(1); \ |\nabla u| = O(|x|^{-2}). \tag{3}$$

Т е о р е м а 1. *Если решение задачи $\mathcal{K}$ существует, то оно единственно.*

Доказательство основано на методе энергетических тождеств.

Модификация задачи

Решение задачи $\mathcal{K}$ будем строить методом, предложенным в работе [1]. Его идея состоит в том, чтобы свести смешанную задачу для гармонических функций к задаче Римана–Гильберта для аналитических функций. Рассмотрим плоскость переменной $x = (x_1, x_2)$ и комплексную переменную $z = x_1 + ix_2$.

Введем класс гладкости h_L^0. Будем говорить, что аналитическая функция $w(z)$ принадлежит классу h_L^0, если она

а) кусочно-голоморфна с линией скачков L,

б) ограничена на бесконечности,

в) непрерывно продолжима на L слева и справа во всех точках, за исключением, быть может, концов дуги L, где может иметь интегрируемые особенности, т.е. $|w(z)| < c|z - e^{id}|^{-1+\varepsilon}$, где c, ε — некоторые положительные константы, $d = a$ или $d = b$.

Пусть $u(x)$ — решение задачи $\mathcal{K}$. Рассмотрим гармонически сопряженную к $u(x)$, вообще говоря, неоднозначную функцию $v(x)$. Построим неоднозначную аналитическую функцию $\Psi(z) = u(x) + iv(x)$. Тогда $\Phi(z) = z\Psi_z(z) = z(u_{x_1} - iu_{x_2})$ — однозначная функция, аналитическая вне L, такая, что $\Phi(0) = 0$. Кроме того, $\Phi(\infty) = 0$, поскольку $|\Psi_z| = |\nabla u|$ и, согласно (3), $\Phi(z) = O(z^{-1})$ при $z \to \infty$.

Поскольку $\Phi(t) = (\cos\theta + i\sin\theta)(u_{x_1} - iu_{x_2})$, $t = \mathrm{e}^{i\theta}$, то $\operatorname{Re}\Phi = \cos\theta u_{x_1} + \sin\theta u_{x_2} = \partial u/\partial r$, $\operatorname{Re}[i\Phi] = -\sin\theta u_{x_1} + \cos\theta u_{x_2} = \partial u/\partial\theta$. Дифференцируя условие (1) по θ, получим, что оно эквивалентно следующим двум условиям:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|_{L^+} = Q^+(t) \equiv \frac{\partial \widehat{Q}^+(t)}{\partial\theta}, \quad t = \mathrm{e}^{i\theta},$$

$$u(\mathrm{e}^{ia}) = \widehat{Q}^+(\mathrm{e}^{ia}). \tag{4}$$

Тем самым задаче $\mathcal{K}$ отвечает следующая задача Римана–Гильберта.

З а д а ч а $\mathcal{R}$. Найти функцию $\Phi(z)$ из класса h_L^0, такую, что $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = 0$, удовлетворяющую граничным условиям: $\operatorname{Re}[i\Phi^+(t)] = Q^+(t)$ на L^+, $\operatorname{Re}[\Phi^-(t)] = Q^-(t)$ на L^-, $t = \mathrm{e}^{i\theta}$. (Условие (4) в задаче $\mathcal{R}$ не учитывается, оно будет учтено позже.)

Сведем задачу Римана–Гильберта к задаче сопряжения [1, 2]. Для этого, во-первых, преобразуем граничные условия задачи $\mathcal{R}$ к виду $\Phi^+(t) - \overline{\Phi^+(t)} = -2iQ^+(t)$, $\Phi^-(t) + \overline{\Phi^-(t)} = 2Q^-(t)$, где черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Во-вторых, заметим, что если $Y(z) \in h_L^0$, то функция $Y_*(z) \equiv \overline{Y(1/\overline{z})}$ тоже принадлежит классу h_L^0 и на единичной окружности выполняется соотношение

$$Y^{\pm}(t) = \overline{Y_*^{\mp}(t)}. \tag{5}$$

Пусть $\Phi(z)$ — решение задачи $\mathcal{R}$. Введем функции

$$\varphi_1(z) = \Phi(z), \quad \varphi_2(z) = \varphi_{1*}(z). \tag{6}$$

Заметим, что функции $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ принадлежат классу h_L^0 и в силу (5) удовлетворяют граничным условиям на L:

$$\varphi_1^+(t) = \varphi_2^-(t) - 2iQ^+(t), \quad \varphi_1^-(t) = -\varphi_2^+(t) + 2Q^-(t). \tag{7}$$

Таким образом, приходим к двумерной задаче сопряжения.

Задача $\mathcal{S}$. Найти функции $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$, принадлежащие классу h_L^0, удовлетворяющие граничным условиям (7) на L и условиям $\varphi_s(0) = \varphi_s(\infty) = 0$, $s = 1, 2$.

Заметим, что всякому решению задачи $\mathcal{R}$ соответствует решение задачи $\mathcal{S}$, построенное по формулам (6). Как показано в работе [2], всякое решение $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ задачи $\mathcal{S}$ порождает решение задачи $\mathcal{R}$: $\Phi(z) = (1/2)[\varphi_1(z) + \varphi_{2*}(z)]$.

Построение решения

Чтобы двумерная задача $\mathcal{S}$ распалась на две одномерные, произведем следующие замены:

$$\nu_1 = e^{i\pi/4}\varphi_1 + e^{-i\pi/4}\varphi_2, \quad \nu_2 = -e^{i\pi/4}\varphi_1 + e^{-i\pi/4}\varphi_2,$$

$$\varphi_1 = \frac{e^{-i\pi/4}}{2}(\nu_1 - \nu_2), \quad \varphi_2 = \frac{e^{i\pi/4}}{2}(\nu_1 + \nu_2). \tag{8}$$

Тогда граничные условия (6) для функций $\nu_1, \nu_2 \in h_L^0$ запишутся в виде

$$\nu_1^+(t) - i\nu_1^-(t) = F_1(t) \equiv 2e^{-i\pi/4}(Q^-(t) + Q^+(t)), \tag{9}$$

$$\nu_2^+(t) + i\nu_2^-(t) = F_2(t) \equiv 2e^{-i\pi/4}(Q^-(t) - Q^+(t)). \tag{10}$$

Очевидно, что функции ν_1, ν_2 должны удовлетворять условиям $\nu_s(0) = \nu_s(\infty) = 0$, $s = 1, 2$. Рассмотрим соответствующие однородные задачи. Для них граничные условия на L имеют вид

$$\nu_1^+(t) = i\nu_1^-(t), \quad \nu_2^+(t) = -i\nu_2^-(t).$$

В качестве частных решений этих задач выберем, как и в работе [3], следующие:

$$\nu_1(z) = \frac{1}{q_1(z)}, \quad \nu_2(z) = \frac{1}{q_2(z)},$$

где

$$q_1(z) = i\,e^{-i(a+3b)/8}(z - e^{ia})^{1/4}(z - e^{ib})^{3/4},$$

$$q_2(z) = i\,e^{-i(3a+b)/8}(z - e^{ia})^{3/4}(z - e^{ib})^{1/4}.$$

Функции $q_s(z)$ обладают следующими свойствами:

$$q_{s*}(z) = \frac{1}{z}q_s(z), \; s = 1, 2,$$

а на дуге L эти функции могут быть представлены в виде

$$q_1^{\pm}(t) = e^{\mp i\pi/4}\,q_1(t) = e^{\mp i\pi/4}\,t^{1/2}R_1(t),$$

$$q_2^{\pm}(t) = e^{\pm i\pi/4}\,q_2(t) = -e^{\pm i\pi/4}\,t^{1/2}R_2(t),$$

где $q_s(t)$ — прямые значения [3] функций $q_s(z)$ на L:

$$q_1(t) = t^{1/2}R_1(t), \quad q_2(t) = -t^{1/2}R_2(t).$$

Кроме того,

$$R_1(t) = 2\left|\sin\frac{\theta - a}{2}\right|^{1/4}\left|\sin\frac{\theta - b}{2}\right|^{3/4},$$

$$R_2(t) = 2\left|\sin\frac{\theta - a}{2}\right|^{3/4}\left|\sin\frac{\theta - b}{2}\right|^{1/4}.$$

Поэтому

$$\overline{q_1^+(t)} = \frac{i}{t}q_1^+(t), \quad \overline{q_2^+(t)} = -\frac{i}{t}q_2^+(t);$$

$$\overline{q_s(t)} = \frac{1}{t}q_s(t), \quad s = 1, 2.$$

Построим теперь решение неоднородных задач сопряжения для функций $\nu_1(z), \nu_2(z) \in h_L^0$ с граничными условиями (9), (10). Как показано в работе [3], эти задачи всегда разрешимы и их решения имеют вид

$$\nu_s(z) = \frac{1}{2\pi i q_s(z)}\int_L \frac{1}{t-z}F_s(t)q_s^+(t)\,dt + \frac{C_s}{q_s(z)}, \quad s = 1, 2,$$

где C_s — произвольные комплексные константы. Их можно определить из условий $\nu_s(0) = 0$:

$$C_s = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_s(t)q_s^+(t)}{t}\,dt, \quad s = 1, 2.$$

С учетом этого $\nu_s(z)$ принимают вид

$$\nu_s(z) = \frac{1}{2\pi i q_s(z)}\int_L F_s(t)q_s^+(t)\left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t}\right]dt, \quad s = 1, 2.$$

Вычисляя $\varphi_s(z)$ по формулам (8), найдем решение задачи $\mathcal{S}$. Решение задачи $\mathcal{R}$ выражается через решение задачи $\mathcal{S}$ и имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}[\varphi_1(z) + \varphi_{2*}(z)] =$$

$$= \frac{e^{-i\pi/4}}{4}[\nu_1(z) - \nu_2(z) + \nu_{1*}(z) + \nu_{2*}(z)] =$$

$$= \frac{e^{-i\pi/4}}{4\pi i}\left(\frac{z}{q_1(z)}\int\limits_L \frac{F_1(t)q_1^+(t)}{t-z}\frac{dt}{t} - \right.$$

$$\left. - \frac{z}{q_2(z)}\int\limits_L \frac{F_2(t)q_2^+(t)}{t-z}\frac{dt}{t}\right).$$

Введем обозначения $f_1(t) = [Q^-(t) + Q^+(t)]$, $f_2(t) = [Q^-(t) - Q^+(t)]$, тогда $F_s(t) = 2\,e^{-i\pi/4} f_s(t)$. Представим $\Phi(z)$ в виде

$$\Phi(z) = \frac{-iz}{q_1(z)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f_1(t)q_1(t)}{t}\frac{dt}{t-z} +$$
$$+ \frac{iz}{q_2(z)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f_2(t)q_2(t)}{t}\frac{dt}{t-z}.$$

Введем функцию $\mu(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0)$, определенную на дуге L. Используя формулы Сохоцкого–Племеля, а также установленные ранее соотношения $q_s^-(t_0) = (-1)^{s+1} i q_s^+(t_0)$, $s = 1, 2$, имеем:

$$\mu(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) =$$
$$= \frac{-1-i}{2}f_1(t_0) + \frac{-1+i}{2}f_2(t_0) +$$
$$+ (-1-i)K_1(t_0) + (1-i)K_2(t_0),$$

где введены вещественные функции

$$K_s(t_0) = \frac{t_0}{2\pi q_s^+(t_0)}\int\limits_L \frac{f_s(t)q_s^+(t)}{t-t_0}\frac{dt}{t} =$$
$$= \frac{1}{4\pi R_s(t_0)}\int\limits_L \frac{f_s(t)R_s(t)}{\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}}\,d\theta,$$
$$t = e^{i\theta}, \quad t_0 = e^{i\theta_0} \in L, \quad s = 1, 2.$$

Вещественная и мнимая части функции $\mu(t_0)$ имеют вид

$$\operatorname{Re}\mu(t_0) = -Q^-(t_0) - \frac{1}{4\pi R_1(t_0)}\int\limits_L f_1(t)R_1(t)\frac{d\theta}{\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}} +$$
$$+ \frac{1}{4\pi R_2(t_0)}\int\limits_L f_2(t)R_2(t)\frac{d\theta}{\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}}, \tag{11}$$

$$\operatorname{Im}\mu(t_0) = -Q^+(t_0) - \frac{1}{4\pi R_1(t_0)}\int\limits_L f_1(t)R_1(t)\frac{d\theta}{\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}} -$$
$$- \frac{1}{4\pi R_2(t_0)}\int\limits_L f_2(t)R_2(t)\frac{d\theta}{\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}}. \tag{12}$$

Чтобы построить решение, представим функцию $\Phi(z)/z$ интегралом типа Коши (так как она аналитична вне L и обращается в нуль на бесконечности):

$$\frac{\Phi(z)}{z} = \Psi_z(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(t)}{t}\frac{dt}{t-z}.$$

Интегрируя это соотношение по z, получим

$$\Psi(z) = u(x) + iv(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b \mu(t)\ln(z-t)\,d\theta + c,$$

где c — комплексная константа, $t = e^{i\theta}$. Отсюда

$$u(x) = \operatorname{Re}\Psi(x) = \tag{13}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b [-\operatorname{Re}\mu(t)\ln r(z,t) + \operatorname{Im}\mu(t)\omega(z,t)]\,d\theta + c_0,$$

где $r(z,t) = |z-t| = \sqrt{(x_1-\cos\theta)^2 + (x_2-\sin\theta)^2}$, $\omega(z,t) = \arg(z-t)$, c_0 — вещественная константа. Функция $\omega(z,t)$ с точностью до $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \ldots$, определяется формулами

$$\cos\omega(z,t) = \frac{x_1 - \cos\theta}{\sqrt{(x_1-\cos\theta)^2 + (x_2-\sin\theta)^2}},$$

$$\sin\omega(z,t) = \frac{x_2 - \sin\theta}{\sqrt{(x_1-\cos\theta)^2 + (x_2-\sin\theta)^2}}.$$

Если $x \notin L$, то под $\omega(z,t)$ будем понимать любую ветвь этой функции, непрерывно изменяющуюся по θ вдоль L.

При таком определении $\omega(z,t)$ функция $u(x)$ является неоднозначной и определяется с точностью до $2\pi m\int\limits_a^b \operatorname{Im}\mu(t)\,d\theta$. Поэтому для ее однозначности нужно потребовать, чтобы

$$\int\limits_a^b \operatorname{Im}\mu(t_0)\,d\theta_0 = 0.$$

Кроме того, из условия ограниченности функции $u(x)$ на бесконечности (3) следует

$$\int\limits_a^b \operatorname{Re}\mu(t_0)\,d\theta_0 = 0.$$

Докажем, что эти условия выполняются. Представим $\Phi(z)$ в виде

$$\Phi(z) = \frac{z}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(t_0)}{t_0}\frac{dt_0}{t_0 - z} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b \mu(t_0)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t_0}{z}\right)^n d\theta_0.$$

Поскольку по построению $\Phi(z) = O(z^{-1})$, то

$$\int_a^b \mu(t_0)\, d\theta_0 = 0.$$

Наконец, $|\nabla u| = |\Psi_z| = \left|\frac{\Phi(z)}{z}\right| = O(z^{-2})$. Итак, функция $u(x)$ является гармонической и удовлетворяет граничным условиям (1), (2) по построению. Кроме того, как только что доказано, $u(x)$ однозначна и удовлетворяет условиям на бесконечности (3).

Для определения константы c_0 воспользуемся условием (4), которое пока что не использовалось:

$$c_0 = \widehat{Q}^+(\mathrm{e}^{ia}) + \frac{1}{2\pi}\int_L \mathrm{Re}\,\mu(t)\ln r(\mathrm{e}^{ia}, t)\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_L \mathrm{Im}\,\mu(t)\omega(\mathrm{e}^{ia}, t)\, d\theta. \tag{14}$$

Приведенные рассуждения резюмирует следующая теорема.

Теорема 2. *Решение задачи $\mathcal{K}$ существует и дается формулой (13), в которой функции* $\mathrm{Re}\,\mu(t), \mathrm{Im}\,\mu(t)$ *берутся из (11), (12), а вещественная константа c_0 — из (14).*

Замечание. Функция

$$v(x) = \mathrm{Im}\,\Psi(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_a^b [\mathrm{Im}\,\mu(t)\ln r(z, t) + \mathrm{Re}\,\mu(t)\omega(z, t)]d\theta + c_1 \tag{15}$$

по построению связана с $u(x)$ соотношениями Коши–Римана $\partial u/\partial r = \partial v/\partial \theta$, $\partial u/\partial \theta = -\partial v/\partial r$. Легко видеть, что функция $v(x)$ однозначная, гармоническая и ограниченная на бесконечности. Поэтому задача $\mathcal{K}$ для функции $v(x)$, в которой условие (1) заменено на условие $\frac{\partial v}{\partial r}\big|_{L^+} = -Q^+(t) \in C^{0,\lambda}(\overline{L})$, а (2) — на условие $v|_{L^-} = \widehat{Q}^-(t) \in C^{1,\lambda}(\overline{L})$, имеет решением функцию (15), где $c_1 = \widehat{Q}^-(\mathrm{e}^{ia}) + (1/2\pi)\int_L [\mathrm{Im}\,\mu(t)\ln r(\mathrm{e}^{ia}, t) + \mathrm{Re}\,\mu(t)\omega(\mathrm{e}^{ia}, t)]\, d\theta$, $Q^-(t) \equiv \partial\widehat{Q}^-(t)/\partial\theta$.

Литература

1. *Крутицкий П.А.* // Матем. моделирование. 1990. **2**, № 4. С. 143.
2. *Крутицкий П.А.* // Матем. моделирование. 1990. **2**, № 9. С. 114.
3. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию
28.04.00

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.17

ОБРАЗОВАНИЕ ЛЕГКИХ β^+-РАДИОАКТИВНЫХ ИЗОТОПОВ ВОЛЬФРАМА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИНТЕНСИВНЫХ ФОТОННЫХ ПУЧКОВ

С. С. Бородина, Б. С. Ишханов, В. И. Мокеев, С. И. Павлов

(*НИИЯФ*)

Исследована динамика образования легких β^+-радиоактивных изотопов вольфрама под действием пучков тормозного излучения различной интенсивности с энергией фотонов, отвечающих возбуждению дипольного гигантского резонанса. Предложена гипотеза о возможности образовании наиболее легких стабильных изотопов элементов под действием высокоинтенсивных потоков γ-квантов.

Введение

Исследование трансмутации атомных ядер под действием потоков γ-квантов высокой интенсивности важно для решения многих фундаментальных и прикладных задач, таких, как объяснение синтеза элементов во Вселенной; исследование свойств атомных ядер вдали от полосы β-стабильности; разрушение долгоживущих составляющих радиоактивных отходов, образующихся при работе ядерных реакторов и в атомной промышленности; введение примесей в полупроводниковые материалы и др.

Характерная особенность ядерных процессов, идущих под действием интенсивных потоков γ-квантов, состоит в том, что в результате реакций (γ, n), $(\gamma, 2n)$ и (γ, p) образуется большое число различных стабильных и радиоактивных изотопов, которые распадаются и разрушаются под действием пучка фотонов и образуют трансмутационную цепочку изотопов [1–4].

Цель настоящей работы — исследование динамики образования легких радиоактивных изотопов вольфрама W ($Z = 74$) под действием фотонных пучков.