ГЕОФИЗИКА

УДК 537.86:519.2; 537.876.23:551.510; 550.3

НОВЫЙ ПОДХОД К ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЭРГОДИЧНОСТИ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ РЕФРАГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

А. Г. Вологдин, В. Д. Гусев

(*кафедра физики атмосферы*)

Предложен новый и простой подход к проблеме пространственной эргодичности: пространственные статистические характеристики фазы при нормальном падении волны на плоскослоистую случайно-неоднородную среду получены путем усреднения вдоль произвольной горизонтальной прямой линии вместо усреднения по объему. При таком усреднении (в отличие от объемного) не маскируются регулярные свойства. Показано, что только при дрейфе неоднородностей с постоянной горизонтальной скоростью пространственные стохастические характеристики можно определить по временным измерениям.

В различных задачах радиозондирования тропосферы или ионосферы возникает необходимость определения стохастических свойств радиоволн, рассеянных на случайных неоднородностях среды. При определении вероятностных характеристик в природных средах ввиду невозможности повторения натурных условий обычно выдвигают гипотезу об эргодичности. Решение общих проблем пространственной эргодичности в ограниченных случайно-неоднородных средах мы проведем для рассеяния волн в неоднородной (в среднем) среде, которое характерно для распространения радиоволн в ионосфере, где необходим учет рефракции.

Стандартное условие пространственной эргодичности для случайного статистически однородного поля $f = f(x, y, z)$, под которым в нашей задаче понимается случайная функция координат, формулируется в виде [1]

$$\langle f(x,y,z)\rangle = \overline{f(x,y,z)}_{V\to\infty} \equiv \equiv \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V}\int\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz. \qquad (1)$$

Необходимо подчеркнуть, что предел должен существовать, причем значение его не зависит от формы объема [2]. Угловые скобки здесь означают усреднение по ансамблю реализаций, т.е. статистическое усреднение, а прямая черта — усреднение по пространственному объему. Предельный переход $V \to \infty$ можно практически рассматривать как условие $L \sim V^{1/3} \gg l_f$ [1], где L — поперечный размер области с объемом V, а l_f — радиус пространственной корреляции поля $f = f(x, y, z)$.

В задачах, связанных с распространением волн различной природы в случайно-неоднородных геофизических средах, которые не являются безграничными, возможность условия $V \to \infty$ не является очевидной. Например, в случайно-неоднородной ионосфере радиус корреляции неоднородностей ионизации и размеры самой ионосферы могут иметь сопоставимые масштабы.

Кроме того (а может быть, это главное), неизвестно, как на результате усреднения по объему $V \to \infty$ скажется факт наличия регулярной неоднородности среды, в которой среднее значение диэлектрической проницаемости среды является, например, функцией координаты z: $\langle \varepsilon(\mathbf{r})\rangle = \varepsilon_0(\mathbf{r}) = \varepsilon_0(z)$ (или факт ограниченности однородной среды в каком-либо направлении). Приемлемый результат возможен, по-видимому, только если объем интегрирования относительно мал (чтобы не маскировалась регулярная неоднородность среды). Однако интегрирование по относительно малому объему не позволяет получить объем выборки, достаточный для нахождения достоверных пространственных статистических характеристик. Увеличение же объема интегрирования неизбежно привело бы к маскировке зависимости от координаты z.

При формулировке условия эргодичности (1) в работе [1] не оговаривалась форма объема интегрирования. В неоднородной (в среднем) среде при $\langle \varepsilon(\mathbf{r})\rangle = \varepsilon_0(\mathbf{r}) = \varepsilon_0(z)$ или в среде, ограниченной в направлении оси z, можно было бы, по-видимому, получить приемлемый результат, например, если бы интегрирование велось по объему, имеющему форму параллелепипеда с фиксированным размером вдоль оси z, а условие $V \to \infty$ выполнялось при увеличении двух других ребер параллелепипеда. Однако очевидно, что это практически не упрощает задачу.

Сформулируем аналогично тому, как это было сделано в работе [3], взамен условия (1) другое определение (гипотезу) эргодичности, при котором интегрирование ведется вдоль произвольной горизонтальной прямой линии (для определенности берем ось x):

$$\langle f(x,y,z)\rangle = \overline{f(x,y,z)}_{L\to\infty} \equiv \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int_0^L f(x,y,z)\,dx. \tag{2}$$

Отметим, что в этом случае – при интегрировании вдоль прямой, перпендикулярной оси z, — ситуация существенно другая. С одной стороны, есть возможность получения достоверных пространственных статистических характеристик, так как нет ограничения для увеличения интервала интегрирования $(0, L)$. С другой стороны, нет препятствия для определения существующей средней (регулярной) зависимости вдоль оси z. Кроме того, очевидно, что математическая сложность вычислений существенно уменьшается.

Рассмотрим распространение плоской волны в случайно-неоднородной плоскослоистой среде при нормальном падении в приближении геометрической оптики. Введем прямоугольную систему координат с осью z в направлении распространения плоской волны. Начало координат расположим на границе раздела плоскослоистой среды со свободным пространством. Диэлектрическую проницаемость среды при $z > 0$ представим в виде суммы среднего значения и флуктуационной составляющей:

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \langle\varepsilon(\mathbf{r})\rangle + \varepsilon_1(\mathbf{r}),$$

при этом $\langle\varepsilon(\mathbf{r})\rangle = \varepsilon_0(\mathbf{r}) = \varepsilon_0(z)$ и $\langle\varepsilon_1\rangle = 0$, $|\varepsilon_1|/\varepsilon_0(z) \ll 1$. В свободном пространстве, т.е. при $z < 0$, имеем $\varepsilon(\mathbf{r}) \equiv 1$, $\varepsilon_1(\mathbf{r}) \equiv 0$. Флуктуационная составляющая диэлектрической проницаемости как функция траектории луча $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\sigma)$ и времени t является четырехпараметрическим случайным полем $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x,y,z,t)$. Это поле считаем статистически однородным. Зависимость ε_1 от времени в случайно-неоднородной среде (ионосфере), которая определяется собственной изменчивостью неоднородностей во времени, связанной с диффузионными процессами и турбулентностью, рассматривать не будем, т.е. $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x,y,z)$.

В рамках геометрической оптики фазу волны на выходе из неоднородной среды после отражения в точке с координатами ($x = 0$, $y = 0$, $z = l$) можно представить в первом приближении теории возмущений [1] в виде

$$\varphi \approx \varphi_0 + \varphi_1,$$

где регулярная компонента (составляющая) фазы равна

$$\varphi_0 = 2k\int_0^l \sqrt{\varepsilon_0(z)}\,dz,$$

а k — волновое число. При этом флуктуационная компонента фазы φ_1 выражается через интеграл вдоль траектории невозмущенного луча:

$$\varphi_1 = \varphi_1(x,y,l) = k\int_0^l \frac{\varepsilon_1(x,y,z)}{\sqrt{\varepsilon_0(z)}}dz. \tag{3}$$

Рассмотрим для флуктуационной компоненты фазы условие (2):

$$\langle\varphi_1(x,y,l)\rangle = \overline{\varphi_1(x,y,l)}_{L\to\infty} \equiv$$

$$\equiv \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int_0^L \varphi_1(x,y,l)\,dx.$$

Обратимся к конечному интервалу $(0, L)$. Значение оценки для флуктуационной компоненты фазы вдоль прямой (оси x) на конечном интервале с учетом (3) имеет вид

$$\overline{\varphi_1(x,y,l)}_L = \overline{\varphi_1}_L \equiv \frac{k}{L}\int_0^l \frac{dz}{\sqrt{\varepsilon_0(z)}}\int_0^L \varepsilon_1(x,y,z)\,dx. \tag{4}$$

Эта оценка является случайной величиной. Для определения несмещенности и состоятельности оценки $\overline{\varphi_1}_L$ вычислим ее математическое ожидание и дисперсию на этом конечном интервале $(0, L)$.

Для математического ожидания получим

$$\begin{aligned}\langle\overline{\varphi_1}_L\rangle &= \frac{1}{L}\int_0^L \langle\varphi_1(x,y,l)\rangle dx = \\ &= \frac{1}{L}\int_0^L dx\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x,y,l)\,W_1(\varphi_1)d\varphi_1 = \\ &= \langle\varphi_1(x,y,l)\rangle\,\frac{1}{L}\int_0^L dx = \langle\varphi_1(x,y,l)\rangle,\end{aligned}$$

где $W_1(U)$ — одномерная плотность вероятности поля. Этот результат доказывает несмещенность оценки $\overline{\varphi_1}_L$.

Для дисперсии оценки (4) получаем, учитывая, что $\langle\overline{\varphi_1}_L\rangle = 0$,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L \langle\varphi_1(x_1,y,l)\,\varphi_1(x_2,y,l)\rangle dx_1dx_2 = \\ &= \frac{2k^2}{L}\int_0^{\infty}d\xi\int_0^l\int_0^l dz_1dz_2\frac{B(\xi,0,z_2-z_1)}{\sqrt{\varepsilon_0(z_1)\,\varepsilon_0(z_2)}},\end{aligned} \tag{5}$$

где $B(\xi,0,z_2-z_1)$ — пространственная автокорреляционная функция случайного поля диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x,y,z)$. Этот результат получен при использовании замены переменных $\xi = x_2 - x_1$, $\eta = x_1$ и дальнейшего интегрирования по η, а также применения при $L\to\infty$ формулы [4]

$$\lim_{L\to\infty}\int_0^L \left(1-\frac{x}{L}\right)f(x)\,dx = \int_0^{\infty} f(x)dx.$$

Сделаем в (5) еще одну замену переменных: $z_1 = \zeta_0 - \zeta/2$, $z_2 = \zeta_0 + \zeta/2$, тогда

$$\sigma^2 = \frac{2k^2}{L} \int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_0^l d\zeta\, B(\xi, 0, \zeta) \times \times \int\limits_{\zeta/2}^{l-\zeta/2} \frac{d\zeta_0}{\sqrt{\varepsilon_0(\zeta_0 - \zeta/2)\varepsilon_0(\zeta_0 + \zeta/2)}}. \tag{6}$$

Предположим, что плоскослоистая среда имеет линейный закон изменения средней диэлектрической проницаемости:

$$\langle \varepsilon(\mathbf{r}) \rangle = \varepsilon_0(z) = 1 - z/l,$$

где l – координата отражения. В этом случае выражение (6) имеет вид

$$\sigma^2 = \frac{2k^2}{L} \int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_0^l d\zeta\, B(\xi, 0, \zeta) \times \times \int\limits_{\zeta/2}^{l-\zeta/2} \frac{d\zeta_0}{\sqrt{(1 - \zeta_0/l)^2 - (\zeta_0/2l)^2}},$$

причем внутренний интеграл (обозначим его I) после замены переменной $u = 1 - \zeta_0/l_0$ ($\zeta_0 = l - lu$, $d\zeta_0 = -l\,du$) может быть вычислен с пределами интегрирования $u_1 = 1 - \zeta/2l$, $u_2 = \zeta/2l$:

$$I = -l \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{u^2 - (\zeta/2l)^2}} = = l\left[\ln\left(\frac{2l}{\zeta} - 1 + \frac{2l}{\zeta}\sqrt{1 - \frac{\zeta}{l}}\right)\right] < l \ln\frac{4l}{\zeta}.$$

Учитывая этот результат, для дисперсии получим

$$\sigma^2 < \frac{2k^2 l}{L} \int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_0^l d\zeta\, B(\xi, 0, \zeta) \ln\frac{4l}{\zeta}.$$

Если предположить, что пространственная автокорреляционная функция случайного поля диэлектрической проницаемости изомерна с гауссовой формой функции автокорреляции

$$B(\xi, \eta, \zeta) = \sigma_\varepsilon^2 \exp\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{a^2}\right),$$

то после интегрирования по переменной ξ получим неравенство для дисперсии:

$$\sigma^2 < \frac{a k^2 \sigma_\varepsilon^2 l \sqrt{\pi}}{L} \int\limits_0^l d\zeta \exp\left(-\zeta^2/a^2\right) \ln\frac{4l}{\zeta}.$$

Поскольку обычно радиус корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости много меньше толщины рассеивающего слоя, то верхний предел в последнем интеграле можно увеличить до бесконечности. В результате (после вычисления интеграла [5]) дисперсия имеет вид

$$\sigma^2 < \frac{a^2 k^2 \sigma_\varepsilon^2 l \pi}{L}\left[\ln\frac{8l}{a} + \frac{C}{2}\right],$$

где C — постоянная Эйлера.

Из полученного соотношения ясно, что при условии $L \to \infty$

$$\lim_{L\to\infty} \sigma^2 = 0.$$

Это позволяет утверждать, что несмещенная оценка флуктуационной компоненты фазы волны (4) асимптотически состоятельна.

Таким образом, утверждение (2) справедливо, т.е. математическое ожидание флуктуационной компоненты фазы волны можно получать усреднением вдоль произвольной горизонтальной прямой линии вместо усреднения по объему.

Результат этой работы можно применить для определения пространственных статистических характеристик случайных полей путем использования временных измерений, что имеет практическую важность. Следует заметить, что в средах типа ионосферы или тропосферы случайные неоднородности, которые определяют свойства диэлектрической проницаемости, участвуют в общем пространственном движении — дрейфе (ветре). Это необходимо учитывать при анализе вариаций параметров рассеянных радиосигналов в ионосфере или тропосфере.

Рассмотрим случайно-неоднородную движущуюся среду, в которой вследствие дрейфа пространственные аргументы флуктуационной компоненты фазы волны (3) будут функциями времени: $\varphi_1 = \varphi_1(x(t), y(t), z(t))$. Когда скорость среды постоянна и горизонтальна, т.е. $V_x = V = \mathrm{const}$, $V_y = 0$, $V_z = 0$, от времени будет зависеть только одна координата: $x(t) = x_0 + Vt$. Две другие от времени не зависят: $y(t) = y_0$, $z(t) = z_0$. Тогда флуктуационная компонента фазы волны (3) на выходе из плоскослоистой среды равна

$$\varphi_1(x_0 + Vt, y_0, 0) = k \int\limits_0^l \frac{\varepsilon_1(x_0 + Vt, y_0, z_0)}{\sqrt{\varepsilon_0(z_0)}}\, dz_0.$$

Рассмотрим временное среднее флуктуационной компоненты фазы волны:

$$\widetilde{\varphi_1(x_0 + Vt, y_0, 0)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \varphi_1(x_0 + Vt, y_0, 0)\, dt = = k \int\limits_0^l \frac{dz_0}{\sqrt{\varepsilon_0(z_0)}} \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \varepsilon_1(x_0 + Vt, y_0, z_0)\, dt\right].$$

Очевидно, что в квадратных скобках стоит временное среднее флуктуационной компоненты $\widetilde{\widetilde{\varepsilon_1}}$. Делая замену переменной интегрирования $x_0 + Vt = x'$, получим, учитывая, что $L = VT$,

$$\widetilde{\widetilde{\varepsilon_1}} = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \int\limits_{x_0}^{x_0+L} \varepsilon_1 \left(x', y_0, z_0\right) \, dx' = \overline{\varepsilon_1},$$

$$\widetilde{\widetilde{\varphi_1 \left(x_0 + Vt, y_0, 0\right)}} = \lim_{L\to\infty} \frac{k}{L} \int\limits_0^l \frac{dz_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \left(z_0\right)}} \times$$

$$\times \int\limits_{x_0}^{x_0+L} \varepsilon_1 \left(x', y_0, z_0\right) \, dx' = \overline{\varphi_1}.$$

Выражения, стоящие справа в этих равенствах, представляют собой средние значения флуктуационных компонент диэлектрической проницаемости и фазы волны, которые вычислены путем усреднения вдоль прямой линии (оси x'), направленной по вектору скорости. Тем самым, опираясь на доказанное выше, можно утверждать, что при выполнении условия пространственной эргодичности (2) найдены пространственные статистические характеристики.

Следовательно, в случайно-неоднородных средах, движущихся с постоянной скоростью, пространственные статистические характеристики как диэлектрической проницаемости, так и фазы волны могут быть определены путем измерения временных средних. Подчеркнем здесь, что такой способ нахождения пространственных свойств возможен только для движущихся сред.

Результаты работы могут быть использованы при обработке натурных данных, полученных при распространении волн разной природы (и частоты) в различных слоях атмосферы, а также в океане.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 98-02-16834).

Литература

1. *Рытов С. М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978.
2. *Бэтчелор Дж.* Теория однородной турбулентности. М.: ИЛ, 1955.
3. *Вологдин А.Г., Гусев В.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. №1. С. 46.
4. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию
21.01.00

УДК 551.465.552

ГРАДИЕНТНОЕ ПЛОТНОСТНОЕ ТЕЧЕНИЕ С ВНУТРЕННЕЙ ВОЛНОЙ, ВЫЗВАННОЙ УСИЛЕНИЕМ ВЕТРА

Б. И. Самолюбов, А. Л. Замарашкин, А. В. Силаев, М. В. Слуев

(*кафедра физики моря и вод суши*)

На основании анализа результатов натурных измерений выявлена эволюция придонного плотностного течения при усилении ветра. Измеренные распределения скорости сопоставлены с расчетными. Установлено, что под воздействием внутренней волны происходит передача импульса от дрейфового потока к придонному, получены полуэмпирические выражения для характеристик этого процесса с учетом влияния градиента давления и плотностной стратификации на течение.

Введение

Интенсивное изучение придонных плотностных потоков обусловлено важностью их учета при прогнозировании распространения примесей в природных водоемах и при использовании энергетических и сырьевых ресурсов морей, озер и водохранилищ. Несмотря на активные исследования этих потоков, данные о плотностных течениях в высокопроточных бассейнах встречаются в публикациях крайне редко [1–4]. Обычно предполагается, что плотностные течения в таких бассейнах отсутствуют из-за сильного перемешивания, ведущего к дестратификации вод. Вместе с тем исследования, проведенные экспедициями МГУ летом 1998 и 1999 гг. в высокопроточном Иваньковском водохранилище, свидетельствуют о существовании в нем придонного стратифицированного потока. Результаты исследований эволюции обнаруженного течения во времени и по глубине приведены в настоящей статье.

1. Объект и методика исследований

Иваньковское водохранилище расположено на равнине, прорезанной долиной р. Волги. Длина водохранилища составляет 120 км, глубина до 20 м, максимальная ширина 4 км. Средний уклон дна $i_s \approx 10^{-4}$, а в отдельных местах на участках протяженностью $1 \div 2$ км может достигать $2 \cdot 10^{-3}$. Среднее значение коэффициента водообмена 8,3 год$^{-1}$ [2, 5]. Обсуждаемые в статье результаты получены при выполнении 5-часовой серии последовательных зондирований в верхней части водохранилища на станции Шоша (волжский фарватер). Одновременно регистрировались профили скорости потока $U(z)$, темпе-