

## АСТРОНОМИЯ

УДК 521.13

## О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ПЕРТУРБАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ ДЛЯ ЛИНДБЛАДОВСКИХ РЕЗОНАНСОВ В СЛУЧАЕ БОЛЬШИХ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОВ

И. А. Герасимов, Б. Р. Мушаилов

(ГАИШ)

Проведено обоснование специального разложения пертурбационной функции в задаче трех тел для орбитальных резонансов в случае больших эксцентриситетов. Данное разложение может быть использовано для построения аналитического решения, позволяющего интерпретировать орбитальную эволюцию астероидов и комет.

**Введение**

В работах [1–4] с использованием асимптотического метода Цейпеля в предположении малости эксцентриситетов и наклона орбит были получены и исследованы аналитические решения задачи трех тел при резонансах первого порядка, которые позволяют интерпретировать эволюцию всех элементов орбит гравитирующих тел. Однако условие малости эксцентриситетов и наклонов орбит, строго говоря, не выполняется для ряда малых тел Солнечной системы, таких, как астероиды, находящиеся в орбитальной соизмеримости с Юпитером (некоторые представители групп Гекубы — соизмеримость 2/1, Гильды (3/2), Туле (4/3) и др.), либрационные астероиды, связанные соизмеримостью с Марсом (внутренняя часть пояса астероидов), спутниковая система Титан–Гиперон (соизмеримость 4/3), кометы, связанные линдбладовскими резонансами с Юпитером (Темпеля–Свифта, Брукса 1, Триттона (2/1), Петерса–Хартли (3/2), Герельса 1, Дю Туа (4/5)), а также многочисленные занептунные объекты пояса Койпера, банка Хиллса и облака Оорта.

В случае больших эксцентриситетов  $e \leq 1$  и наклона орбит гравитирующих тел в классическом разложении Ньюкома [5] пертурбационной функции с целью получения аналитического решения ограничение лишь первыми членами разложения становится уже неправомерным, и поэтому, когда эксцентриситеты не являются малыми величинами (для сильно вытянутых орбит), следует проводить специальное разложение возмущающей функции.

Возмущающая функция задачи трех тел с точностью  $O[\mu^2]$  имеет вид [4]

$$\begin{aligned} R &= \mu' (R_1 + R_2), \quad \mu' = \alpha_1 \alpha_2 \mu, \\ R_1 &= 1/\Delta, \quad R_2 = -r_1 \cos H / r_2^2, \\ \Delta^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos H, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\cos H = \cos(w_1 - w_2) - 2 \sin^2(\Delta i/2) \sin w_1 \sin w_2,$$

где  $\mu$  — малый параметр;  $\alpha_1, \alpha_2$  — некоторые отличные от нуля постоянные;  $r_j$  и  $w_j$  — радиус-век-

торы в системе координат, совмещенной с центром масс центрального тела  $P_0$ , и истинные долготы, отсчитываемые от общего узла, тел  $P_j$  ( $j = 1, 2$ ) соответственно;  $\Delta i$  — взаимный наклон оскулирующих орбит тел  $P_1$  и  $P_2$ ; гравитационная постоянная при соответствующем выборе единицы времени принята за единицу.

Будем далее в общем случае рассматривать пертурбационную функцию (1) относительно переменных  $k_j, h_j, \bar{\sigma} = \sin^2(\Delta i/2)$ , где

$$k_j = e_j \cos S_j, \quad h_j = e_j \sin S_j, \quad (2)$$

а  $S_j$  — аномалия Делоне — медленная переменная,  $e_j$  — эксцентриситет орбиты тела  $P_j$  ( $j = 1, 2$ ). Разложение в ряд Тейлора возмущающей функции  $R$  в окрестности точки  $(k_{j0}, h_{j0}, \bar{\sigma}_0) \in D$  ( $j = 1, 2$ ), где  $D$  — область регулярности возмущающей функции, следует осуществлять в несколько этапов. Сначала необходимо фиксировать  $k_2$  ( $k_2 = k_{20}$ ),  $h_2$  ( $h_2 = h_{20}$ ), т.е.  $e_{20}, S_{20}$ , а также  $\bar{\sigma}$  ( $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0$ ) и провести формальное тейлоровское разложение функции  $R$  в окрестности  $(k_{10}, h_{10})$ . Затем после соответствующих разложений коэффициентов при степенях  $(k_1 - k_{10})^m (h_1 - h_{10})^n$  ( $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ) следует с учетом условия резонансности провести усреднение этих коэффициентов. И наконец, полученные результаты целесообразно распространить на область в окрестности  $k_{20}, h_{20}$  и  $\bar{\sigma}_0$  ( $k_2 \neq k_{20}, h_2 \neq h_{20}, \bar{\sigma} \neq \bar{\sigma}_0$ ).

Однако, согласно сказанному выше, необходимо на множестве  $D$  обосновать абсолютную сходимость указанного формального разложения  $R$  в действительном пространстве переменных  $(k_j, h_j, \bar{\sigma})$  ( $j = 1, 2$ ).

**О сходимости возмущающей функции**

Рассмотрим сначала случай плоского ограниченного эллиптического варианта задачи и, как будет видно из дальнейшего, не нарушая общности, исследуем внутренний вариант задачи, когда среднее движение  $n_2$  возмущающего тела  $P_2$  меньше среднего

движения  $n_1$  пассивно гравитирующего  $P_1$ . Тогда в (1) следует считать  $\mu' = \mu$ ,  $\Delta i = 0$  и  $w_j = \omega_j + v_j$  ( $j = 1, 2$ ), при этом  $\omega_j$  и  $v_j$  — аргументы перигетров и истинные аномалии параметров орбит тел  $P_j$  ( $j = 1, 2$ ) соответственно.

На основании критерия Зундмана в рассматриваемом случае ( $a_2 > a_1$ ) для области, в которой  $R$  не содержит особенности ( $\Delta \neq 0$ ;  $0 < r_1 < r_2$ ), имеем неравенства [6]

$$a_1 F_1(e_1) < a_2 F_2(e_2), \quad F_2(e_1) > 0, \quad (3)$$

где  $a_j$  — большие полуоси орбит тел  $P_j$  ( $j = 1, 2$ );  $F_j(x)$  — вещественные функции, разложение которых в ряд Тейлора при  $x < 1$  представимо в виде

$$F_1(x) = 1 + 2x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \dots, \quad (4)$$

$$F_2(x) = 1 - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \dots$$

Неравенства (3) ограничивают допустимую область изменения эксцентриситета и большой полуоси ( $e_1, a_1$ ) пассивно гравитирующего тела, поскольку в рамках ограниченного варианта задачи трех тел величины  $e_2$  и  $a_2$  фиксированы (второе неравенство (3) эквивалентно следующему:  $e_1 < \bar{e}$ ,  $\bar{e} = 0,66274\dots$ ). На рис. 1, *a* представлены указанные области, локализованные ниже приведенной кривой, когда возмущающим телом является Юпитер ( $e_2 = 0,048$ ,  $a_2 = 1$ ). При фиксированных величинах параметра  $a_1/a_2$ , соответствующих точной орбитальной соизмеримости периодов пассивно гравитирующего тела  $P_1$  с Юпитером ( $P_2$ ) вида  $m/(m+1)$  ( $m = 1, 2, 3$ ), функциональные зависимости между максимально допустимыми эксцентриситетами  $e_j$  орбит  $P_j$  ( $j = 1, 2$ ) имеют вид, показанный на рис. 1, *б* (неравенства (3) реализуются ниже приведенных кривых). Эти графики свидетельствуют о том, что существуют конечные области изменения эксцентриситета  $e_1$  пассивно гравитирующего тела, соответствующие регулярному характеру изменения

(т. е. особые точки отсутствуют) возмущающей функции  $R$ .

В области  $D$  регулярности функции  $R$ , как нетрудно видеть, если перейти от функции  $R_1 = 1/\Delta$  к  $R^* = R_1^{-2}/2$ , возмущающая функция имеет в окрестности точки  $(k_{j0}, h_{j0}) \in D$  ( $j = 1, 2$ ) непрерывные частные производные до любого конечного порядка  $N$ , поэтому она представима соответствующим рядом Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, а следовательно, в малой окрестности  $(k_{j0}, h_{j0})$  ( $j = 1, 2$ ) ряд Тейлора сходится, т. е. остаточный член стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$  [7].

Оценим теперь область абсолютной сходимости возмущающей функции  $R$  в исследуемом пространстве переменных  $(k_1, h_1, S_2)$ .

Из (1) в рассматриваемом случае в области  $D$  ( $r_1 < r_2$ ) имеем [8]:

$$R = \frac{\mu}{r_2} \left[ 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^m \tilde{P}_m(\cos H) \right], \quad (5)$$

где  $\tilde{P}_m$  — полином Лежандра порядка  $m$ . Как известно, ряд (5) сходится абсолютно для всех  $r_1 < r_2$ . И если нам далее удастся определить область ( $D^* \subset D$ ) абсолютной сходимости разложений  $1/r_2$ ,  $r_1$  и  $\tilde{P}_m(\cos H)$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) в соответствующие ряды по степеням  $(k_j - k_{j0})$ ,  $(h_j - h_{j0})$  ( $j = 1, 2$ ) (строго говоря, в рассматриваемом случае вместо  $k_2, h_2$  можно ограничиться лишь переменной  $S_2$ , так как  $e_2 = \text{const}$ ), то в этой области  $D^*$  будут сходиться по степеням  $(k_j - k_{j0})$ ,  $(h_j - h_{j0})$  ( $j = 1, 2$ ) и ряды  $(r_1/r_2)^2$ ,  $(r_1/r_2)^2 \tilde{P}_2(\cos H)$ ,  $(r_1/r_2)^3 \tilde{P}_3(\cos H), \dots$  — как произведение абсолютно сходящихся рядов, а также ряд (5) — как сумма абсолютно сходящихся рядов. Следовательно, абсолютно сходящийся ряд (5) тогда обеспечит в области  $D^*$  (которую следует определить) и абсолютную сходимость искомого ряда

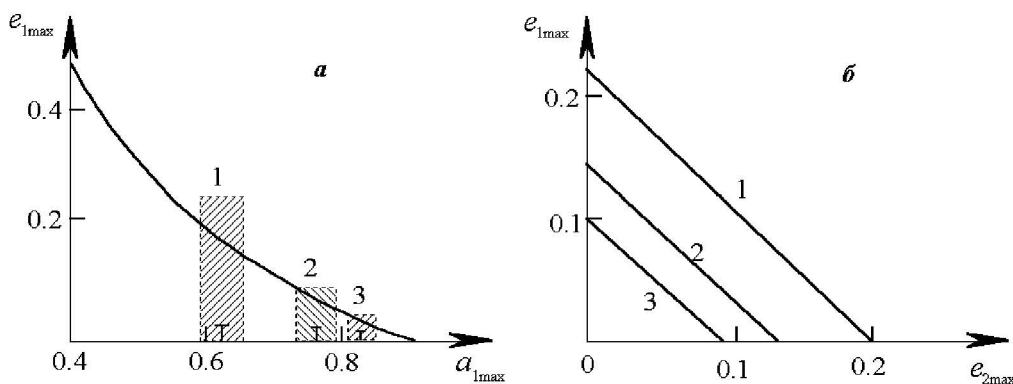


Рис. 1. Допустимые изменения элементов орбит гравитирующих тел в плоской ограниченной эллиптической задаче трех тел, при которых гарантируется регулярность возмущающей функции: *a* — случай, когда возмущающее тело — Юпитер, зоны 1, 2, 3 отвечают астероидам групп Гекубы, Гильды и Туле соответственно; *б* — диаграмма  $e_{1\max} - e_{2\max}$ , в которой в качестве параметра выступает отношение больших полуосей:  $a_1/a_2 = 0,630$  (1);  $0,763$  (2) и  $0,825$  (3)

$$R(\mathbf{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \times \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[ (k_j - k_{j0}) \frac{\partial}{\partial k_{j0}} + (h_j - h_{j0}) \frac{\partial}{\partial h_{j0}} \right] \right\}^m R, \\ \mathbf{z} = (k_j, h_j) \quad (j = 1, 2). \quad (6)$$

Определим сначала область абсолютной сходимости разложений  $r_j$  в соответствующие ряды по степеням  $(k_j - k_{j0})$ ,  $(h_j - h_{j0})$  ( $j = 1, 2$ ). Считая, что пассивно гравитирующее тело  $P_1$  движется по оскулирующему эллипсу (а для ограниченного эллиптического варианта движение тела  $P_2$  происходит по фиксированному эллипсу), можно записать

$$r_j = a_j (1 - e_j \cos E_j), \quad E_j - M_j - e_j f(E_j) = 0 \quad (7) \\ (j = 1, 2),$$

где  $E_j$ ,  $M_j$  — эксцентрисические и средние аномалии орбит тел  $P_j$  соответственно,  $f(E_j) = \sin E_j$  — целая функция ( $j = 1, 2$ ). Тогда, согласно формуле Лагранжа (в общем случае — формуле Бурмана–Лагранжа), ряд вида

$$\Phi(E_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e_j^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{dM_j^{m-1}} [\Phi'(M_j) f^m(M_j)], \quad (8)$$

где  $\Phi(E_j)$  ( $j = 1, 2$ ) есть произвольная заданная голоморфная (целая) функция, является абсолютно сходящимся для всех значений эксцентриситетов  $e_j$ , удовлетворяющих условию [8, 9]

$$e_j < \bar{e}, \quad \bar{e} = 0,66274 \dots \quad (j = 1, 2). \quad (9)$$

Поскольку абсолютно сходящийся ряд допускает перестановку слагаемых, то, учитывая, что  $e_j \equiv (e_j - e_{j0}) + e_{j0}$  ( $j = 1, 2$ ), ряд (8), а следовательно, согласно (7), и разложение для  $r_j$  представляются при выполнении условия (9) абсолютно сходящимися рядами относительно  $(e_j - e_{j0})$  вида

$$r_j/a_j = \sum_{m=0}^{\infty} (e_j - e_{j0})^m S_m(M_j) \quad (j = 1, 2), \quad (10)$$

в которых

$$S_m(M_j) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!m!} e_{j0}^{n-m} C_n(M_j), \\ C_0(M_j) = 1, \quad C_1(M_j) = -\cos M_j, \\ C_n(M_j) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dM_j^{n-2}} [\sin^n M_j], \\ n = 2, 3, \dots \quad (j = 1, 2). \quad (11)$$

Так что абсолютная сходимость ряда (10) гарантируется для всех значений эксцентриситетов  $e_j$  из интервалов  $e_j - e_{j0} < \bar{e} - e_{j0}$ ,  $0 \leq e_{j0} < 1$  ( $j = 1, 2$ ).

Для определения полной области сходимости (7) по степеням эксцентриситетов  $(e_j - e_{j0})$  ( $j = 1, 2$ ) представим уравнение Кеплера при  $0 \leq e < 1$  в виде интеграла дифференциального уравнения

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E}. \quad (12)$$

(Здесь и ниже для упрощения записей введено обозначение  $E = E_j$ ,  $e = e_j$  ( $j = 1, 2$ )). Согласно теореме Коши о существовании голоморфного решения, уравнение (12) будет иметь голоморфный интеграл, который обращается в  $E_0$  при  $e = e_0$  внутри круга, не содержащего особых точек правой части уравнения (12). Особые точки (12) определим из уравнений

$$1 - e \cos E = 0, \quad E - M - e \sin E = 0 \quad (13)$$

при условии, что  $e = u + iv$ ,  $E = \bar{x} + iy$  ( $i^2 = -1$ ). Разделяя вещественные и мнимые части (13) для уравнения кривой, определяющей особые точки правой части (12), в параметрической форме получим

$$u^2 = \bar{y} (\operatorname{cth} \bar{y} - \bar{y}), \quad v^2 = \bar{y} (\bar{y} - \operatorname{th} \bar{y}). \quad (14)$$

Кривая (14) представляет собой огибающую семейства окружностей с центром в точке  $e_0$  ( $e_0$  — вещественное число). Радиусы  $R_{e_0}$  этих окружностей и являются радиусами сходимости разложения  $E$  по степеням  $(e - e_0)$ . Величины  $R_{e_0}$  определяются из очевидного условия  $R_{e_0}^2 = \min \left\{ (u - e_0)^2 + v^2 \right\}$ , которое с учетом (14) преобразуем к виду

$$R_{e_0}^2 = e_0^2 + \min \left\{ 2\bar{y} / \operatorname{sh}(2\bar{y}) - 2e_0 \sqrt{\bar{y} (\operatorname{cth} \bar{y} - \bar{y})} \right\}.$$

Определяя экстремум по общим правилам, находим

$$R_{e_0} = (2y^* / \operatorname{sh}(2y^*) - e_0^2 \operatorname{ch}(2y^*))^{1/2}, \quad (15)$$

где  $y^*$  — положительный корень уравнения

$$\tilde{\Phi}(y) = e_0^2, \quad \tilde{\Phi}(y) = y (\operatorname{cth} y - y) \operatorname{ch}^4 y.$$

Зависимость  $R_{e_0}(e_0)$ , приведенная на рис. 2, показывает, что для всех  $0 \leq e_0 < 1$  существует отличный от нуля радиус сходимости  $R_{e_0}$ .

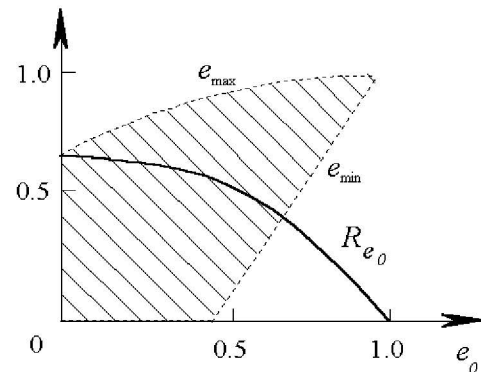


Рис. 2. Зависимость радиуса сходимости  $R_{e_0}$  тейлоровских разложений по степеням  $(e - e_0)$  для координат эллиптического движения от величины эксцентриситета  $e_0$ . Область сходимости, локализованная между  $e_{\max} = R_{e_0} + e_0$  и  $e_{\min} = e_0 - R_{e_0} \geq 0$ , заштрихована

Непосредственный переход от эксцентриситетов  $(e_j - e_{j0})$  к переменным  $(k_j - k_{j0}), (h_j - h_{j0})$  осуществляется в соответствии с (2) следующим образом:

$$e_j - e_{j0} = \sqrt{k_j^2 + h_j^2} - \sqrt{k_{j0}^2 + h_{j0}^2} \quad (j = 1, 2). \quad (16)$$

Предполагая  $e_{j0} \neq 0$  (в противном случае искомое разложение сводится к классическому), из (16) получаем

$$e_j - e_{j0} = \sqrt{k_{j0}^2 + h_{j0}^2} \times \left\{ (1 + \psi [(k_j - k_{j0}), (h_j - h_{j0})])^{1/2} - 1 \right\} \quad (j = 1, 2),$$

$$\psi = \left[ 2k_{j0}(k_j - k_{j0}) + (k_j - k_{j0})^2 + 2h_{j0}(h_j - h_{j0}) + (h_j - h_{j0})^2 \right] / (k_{j0}^2 + h_{j0}^2).$$

При  $|\psi| < 1$ , т.е.  $0 < e_j < \sqrt{2}e_{j0}$ , или

$$e_j - e_{j0} < (\sqrt{2} - 1) e_{j0} \quad (j = 1, 2), \quad (17)$$

правая часть (16) представляется абсолютно сходящимися по степеням  $(k_j - k_{j0}), (h_j - h_{j0})$  рядами вида [7]

$$e_j - e_{j0} = \frac{k_{j0}}{\sqrt{k_{j0}^2 + h_{j0}^2}} (k_j - k_{j0}) + \frac{h_{j0}}{\sqrt{k_{j0}^2 + h_{j0}^2}} (h_j - h_{j0}) + \dots \quad (j = 1, 2). \quad (18)$$

Условие (17) при  $e_{j0}^* = 0,6695 \dots$  совпадает с (15). При  $e_{j0} > e_{j0}^*$  неравенство (17) содержит в себе (15), в то время как при  $0 < e_{j0} \leq e_{j0}^*$  ( $j = 1, 2$ ) определяющим является условие (17).

Таким образом, при

$$0 < e_{j0} \leq e_{j0}^* \quad (19)$$

величины  $r_j/a_j$  ( $j = 1, 2$ ) разлагаются в соответствующие абсолютно сходящиеся ряды по степеням  $(k_j - k_{j0}), (h_j - h_{j0})$  для всех

$$e_j - e_{j0} < (\sqrt{2} - 1) e_{j0}. \quad (20)$$

При  $e_{j0}^* < e_{j0} < 1$  область сходимости разложений  $r_j/a_j$  приведена на рис. 2. Однако искомая область  $D^*$  определяется указанными областями сходимости с учетом ограничений (3), (4), задающих область  $D$  регулярности возмущающей функции  $R$ , поскольку  $D^* \subset D$ .

Учитывая (7), согласно теореме Вейерштрасса, в области  $D$  для разложений обратной величины радиус-вектора тела  $P_2$  получим

$$a_2/r_2 = \sum_{m=0}^{\infty} (e_2 - e_{20})^m \tilde{S}_m(M_2), \quad (21)$$

где  $\tilde{S}_m(M_2)$  определяется правой частью выражения (11), в котором коэффициент  $C_n$  следует заменить на  $\tilde{C}_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n(\sin^n M_2)}{dM_2^n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Для зависимости (21) остаются справедливыми представление (18) и условия (19), (20).

В рассматриваемом случае плоского варианта задачи  $H = v_1 - M_1 - (v_2 - M_2) + \lambda_1 - \lambda_2$ , где  $\lambda_j$  — средние долготы тел  $P_j$ , уравнения центров  $v_j - M_j$  ( $j = 1, 2$ ), а также косинусы и синусы от этих аргументов разлагаются в абсолютно сходящиеся по степеням эксцентриситетов ряды вида (10) и при этом  $|\tilde{P}_m(\cos H)| \leq 1$  есть полином относительно  $\cos H$  степени  $m$  [8]. Поэтому  $\tilde{P}_m(\cos H)$  при условиях (19), (20) для любого конечного  $m$  представляется абсолютно сходящимся рядом по степеням  $(k_j - k_{j0}), (h_j - h_{j0})$  ( $j = 1, 2$ ).

Следовательно, в области  $D^* \subset D$ , определяемой условиями (19), (20), возмущающая функция (5) с учетом (3), (4) представима в окрестности точек  $(k_{j0}, h_{j0})$  ( $j = 1, 2$ ) абсолютно сходящимся рядом (6).

Для внешнего варианта ограниченной эллиптической задачи область  $D$  регулярности функции  $R$ , в отличие от (3), (4), будет определяться неравенствами вида

$$a_1 F_2(e_1) > a_2 F_1(e_2), \quad F_2(e_2) > 0 \quad (a_1 > a_2), \quad (22)$$

а вместо (5) будем иметь

$$R = \frac{\mu}{r_1} \left[ 1 + \sum_{m=2}^{\infty} (r_2/r_1)^m \tilde{P}_m(\cos H) \right].$$

Однако при этом, как легко видеть, рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что в области  $D^* \subset D$ , задаваемой условиями (19), (20) и (22), существует абсолютная сходимость ряда (6).

И наконец, не возникает никаких принципиальных затруднений и для обоснования абсолютной сходимости разложений возмущающей функции при переходе к неограниченному, а также к пространственному вариантам задачи. В последнем случае для определения области регулярности  $D$  можно воспользоваться критерием Сильвы вида [10]

$$\sin^2 \left( \frac{\Delta i}{2} \right) = \frac{[a_2 F_2(e_2) - a_1 F_1(e_1)]^2}{4a_1 a_2 F_3(e_1) F_3(e_2)}, \quad (23)$$

где  $F_3(x) = \sqrt{(1+x)^2 + \text{ch}^2 y (1+x^2)}/2$ ,  $y = x \text{ch } \bar{y}$ ,  $a_2 > a_1$ . Для астероидной задачи, когда возмущающим телом является Юпитер, на основании (23) построены зависимости  $\sigma_{\max} = \sin(\Delta i_{\max}/2)$  от максимальных значений эксцентриситетов  $e_{1\max}$  орбиты пассивно гравитирующего тела  $P_1$  для различных значений параметра  $a_1/a_2$  (рис. 3).

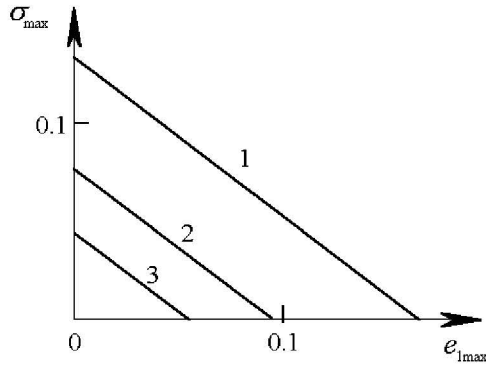


Рис. 3. Расчетные зависимости  $\sigma_{\max}$  от  $e_{1\max}$ , соответствующие случаю, когда величины больших полуосей  $a_1$  отвечают точным орбитальным соотношениям астероидов групп Гекубы (1), Гильды (2), Туле (3)

Рассмотренное здесь разложение пертурбационной функции будет использовано нами в следующей работе при построении аналитического решения, интерпретирующего орбитальную эволюцию астероидов и комет.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-02-17744).

#### Литература

1. Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р. // Астрон. вестн. 1994. **28**, №4–5. С. 178.
2. Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р., Ракитина Н.В. // Астрон. вестн. 1994. **28**, №4–5. С. 186.
3. Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р. // Астрон. вестн. 1995. **29**, №1. С. 58; 67.
4. Мушаилов Б.Р. // Астрон. вестн. 1995. **29**, №1. С. 47; №4. С. 375.
5. Newcomb S. // Astron. Papers. Washington. 1895. V. 5. Pt. 1.
6. Sundman K. Über die Störungen der kleinen Planeten. Akad. Abhandl., K. Alexanders Univers. Helsingfors, 1901.
7. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Наука, 1973.
8. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1972.
10. Silva G. // Bull. Astron. 1909. **26**. P. 49.

Поступила в редакцию  
12.05.00