

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 51:53

ВЫЧИСЛЕНИЕ β -ФУНКЦИИ В МОДЕЛИ φ^4 В ШИРОКОМ ИНТЕРВАЛЕ ЗНАЧЕНИЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ

В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе, И. Л. Юдин

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

E-mail: belokur@rector.msu.ru

В рамках новой теории возмущений со сходящимися рядами рассматривается задача восстановления величины, заданной конечным числом членов ее пертурбативного разложения, в широком интервале значений константы связи. В качестве примеров такого рода задач рассматриваются нульмерный аналог функционального интеграла и β -функция модели $g(\varphi^a \varphi^a)^2$, $a = 1, 2$, в четырехмерном пространстве-времени.

Введение

Как известно, используемые в квантовой физике ряды теории возмущений представляют собой асимптотические разложения по степеням некоторого параметра (константы связи) и поэтому имеют смысл лишь при достаточно малых значениях этого параметра.

В работах [1–7] был развит новый подход к суммированию расходящихся рядов и вычислению функциональных интегралов, в котором вычисляемым величинам ставятся в соответствие аппроксимирующие их с любой заданной точностью абсолютно сходящиеся ряды.

В рамках этого метода единым образом можно рассматривать случаи как малых, так и больших значений параметра разложения.

Замечательной особенностью данного метода суммирования является то, что коэфф-фициенты асимптотического разложения и сама функция $f(g)$ удовлетворяют некоторым условиям (см. ниже раздел 1), оказывается возможным восстановить истинное значение $f(g)$ с высокой точностью для всех значений параметра разложения, зная лишь конечное число членов ряда традиционной теории возмущений.

Настоящая работа посвящена рассмотрению задачи восстановления величины, заданной конечным числом членов ее пертурбативного разложения, в широком интервале значений параметра разложения.

1. Метод суммирования расходящихся рядов

Рассмотрим класс знакопередающихся рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n (-g)^n. \quad (1)$$

Этот класс описывается следующими тремя свойствами:

1. При $n > N_0$ коэффициенты f_n удовлетворяют условию

$$f_n \sim C n! a^n n^b,$$

где a , b и C — некоторые положительные константы.

2. Ряд (1) есть тейлоровское разложение функции $f(g)$ в точке $g = 0$. Функция $f(g)$ непрерывно дифференцируема при $g \geq 0$ и имеет аналитическое продолжение в правую полуплоскость ($\operatorname{Re} g > 0$). Выполнена следующая оценка равномерно по $g \in G$, $G = \{g: \operatorname{Re} g > 0\}$:

$$|f(g) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n g^n| < C_1^N N! N^\alpha g^N,$$

где α — положительная константа.

При этих условиях функция $f(g)$ однозначно восстанавливается по ряду (1).

3. Выполняется следующее неравенство:

$$\int_0^\infty x^n |F(x)| dx \leq \text{const} \left| \int_0^\infty x^n F(x) dx \right|, \quad n \geq 0,$$

где $F(x)$ — обобщенная функция, причем для $f(g)$ справедливо представление

$$f(g) = \int_0^\infty e^{-gx} F(x) dx. \quad (2)$$

Введем функцию

$$\tilde{\varphi}_m(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp\{-i\rho r\} \exp\{-r^{2m}\} dr, \quad (3)$$

где m — некоторое натуральное число. Введем обозначения:

$$A_{2n}(R) = \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \tilde{\varphi}(\rho) \rho^{2n} d\rho, \quad B_\alpha = \int_0^\infty x^\alpha F(x) dx.$$

Представим теперь экспоненту в (2) как обратное преобразование Фурье функции $\tilde{\varphi}(\rho)$:

$$e^{-gt} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\rho) \exp\{i\rho g^{1/2m} t^{1/2m}\} d\rho.$$

Вводя параметр обрезания R в интеграле по ρ и раскладывая экспоненту $\exp\{-i\rho g^{1/2m} t^{1/2m}\}$, получим вместо (2) следующий сходящийся ряд для $f(g)$:

$$f(g, R) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} g^{n/m} B_{n/m} A_{2n}(R). \quad (4)$$

Для больших значений g можно представить регуляризованную функцию $f(g, R)$ в виде разложения по обратным степеням g . Такой способ разложения позволяет уменьшить число коэффициентов f_k исходного ряда теории возмущений (1), эффективно используемых для вычисления $f(g)$.

Произведем замену $\rho \rightarrow g^{-1/2m} \rho$ и разложим первую экспоненту в подынтегральном выражении в (3), что даст

$$f(g, R) = \frac{1}{4\pi m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} g^{-(2n+1)/2m} E_{2n}(m, R), \quad (5)$$

где

$$E_{2n}(m, R) = \frac{1}{2\pi m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2m}\right) \times \\ \times \frac{2R^{2n+2k+1}}{2n+2k+1} B_{\frac{k}{m}}.$$

Функцию $f(g)$ можно теперь с любой точностью аппроксимировать функцией $f(g, R, N)$ — суммой N ($N < \infty$) слагаемых в (4) и (5) для малых и больших значений g соответственно.

Коэффициенты $B_{k/m}$ с целыми индексами $k/m = n$ представляют собой коэффициенты f_n исходного ряда (1). Вычисление коэффициентов с дробными индексами — это самостоятельная задача в рамках данного метода. Наиболее простым способом ее решения является интерполяция функции $B(\alpha) \equiv B_\alpha$ на нецелые значения аргумента. Более точный метод определения $B_{k/m}$ был предложен в работе [5] для случая $m = 4$. В рамках этого метода коэффициенты B_α с нецелыми α находятся как решения системы приближенных нелинейных алгебраических уравнений

$$B_{(n-1)/4}^{9/16} B_{n/4}^{9/16} B_{(n-2)/4}^{-1/16} B_{(n+2)/4}^{-1/16} \approx \\ \approx \frac{(-1)^n 2(2n-1)!}{\pi} \sum_{k=0}^{4N-1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{a^{2k-2n+1}}{2k-2n+1} B_{k/4}, \quad (6)$$

где a — свободный параметр, выбираемый из условий минимизации ошибки решения (6).

Получить значения параметра R можно, воспользовавшись следующими соображениями. Как следует из общей идеи метода, при фиксированном g и $R, N \rightarrow \infty$ регуляризованная конечная сумма $f(g, R, N)$ стремится к $f(g)$. Если зафиксировать N , то, поскольку $f(g, R, N)$ является полиномом по R степени $4mN + 1$, при некоторых $\varepsilon = \varepsilon(g, N)$ на интервале Δ_ε значений R функция $f(g, R, N)$ будет аппроксимировать $f(g)$ с точностью, не меньшей ε . Как показывает анализ, при $N = 4$ или 5 и $0 \leq g \leq 20$ существует интервал Δ_ε такой, что относительная ошибка приближения не превосходит 0,1. В качестве приближенного значения функции $f(g)$ можно взять следующую величину:

$$\bar{f}(g) = (1/2) \left| \max_{\Delta_\varepsilon} f(g, R, N) + \min_{\Delta_\varepsilon} f(g, R, N) \right|.$$

Возникающая при этом ошибка составляет, очевидно,

$$\delta_f = (1/2) \left| \max_{\Delta_\varepsilon} f(g, R, N) - \min_{\Delta_\varepsilon} f(g, R, N) \right|.$$

Данный способ определения параметра R применим в равной степени и при малых и при больших g .

2. Примеры вычислений

1. Нульмерный аналог функционального интеграла. Рассмотрим нульмерный аналог функционального интеграла, возникающего в квантовой теории поля с потенциалом взаимодействия $\lambda\varphi^4$:

$$I(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-x^2 - gx^4\} dx = \\ = \exp\left\{\frac{1}{8g}\right\} K_{1/4}\left(\frac{1}{8g}\right) \frac{1}{\sqrt{4g}},$$

где $K_{1/4}$ — функция Макдональда. Соответствующий асимптотический ряд расходится:

$$I(g) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-g)^k, \quad a_k = \frac{1}{k!} \frac{1}{2^{4k}} \frac{(4k)!}{(2k)!}. \quad (7)$$

В рассматриваемом случае коэффициенты $B_{k/m}$, фигурирующие в (4) и (5), могут быть вычислены аналитически:

$$B_{k/m} = \Gamma\left(\frac{4k+2}{2m}\right).$$

Воспользовавшись этим фактом, мы провели сравнение точных значений $B_{k/4}$ и приближенных $\tilde{B}_{k/4}$, рассчитанных с помощью метода, описанного в работе [5], — решения системы приближенных нелинейных алгебраических уравнений (6). Результаты сравнения приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

k	$B_{k/4}$	$\tilde{B}_{k/4}$	$\frac{ B_{k/4} - \tilde{B}_{k/4} }{B_{k/4}}$
5	2	1.957	0.0214
6	3.323	3.281	0.01269
7	6	5.89	0.0184
9	24	24.494	0.0206
10	52.343	54.175	0.035
11	120	123.804	0.03817
13	720	693.432	0.0369

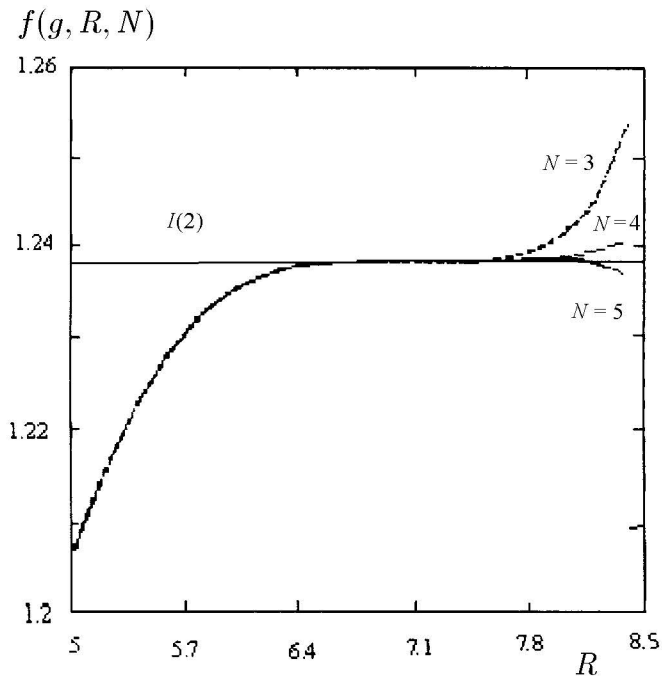


Рис. 1

На рис. 1 приведена типичная зависимость полинома $f(g, R, N)$ от R при фиксированном значении константы связи $g = 2$ и при различных значениях N — числа «известных» членов ряда традиционной теории возмущений (7), причем при расчетах использовались точные значения коэффициентов B_α . Как и следовало ожидать, с ростом N область значений R , при которых $f(g, R, N)$ хорошо аппроксимирует функцию $f(g)$, увеличивается.

Результат сравнения точных значений интеграла и приближенных, полученных описанным выше методом, в области $0 < g \leq 10$ приведен на рис. 2. При этом значения параметра R определялись так, как это было изложено в предыдущем разделе, значения m и N полагались равными соответственно 4 и 5, а в качестве коэффициентов $B_{k/4}$ использовались их приближенные значения $\tilde{B}_{k/4}$. Во всей рассмотренной области значений g погрешность полученного приближения не превосходит 0.01. Для расчета в области $0 < g \leq 1$ использовалась формула (4), в области $1 < g \leq 10$ — формула (5). Значения аппроксиманты $f(g, R, N)$, вычисленные в точке $g = 1$ по формулам (4) и (5), практически совпадают. Это

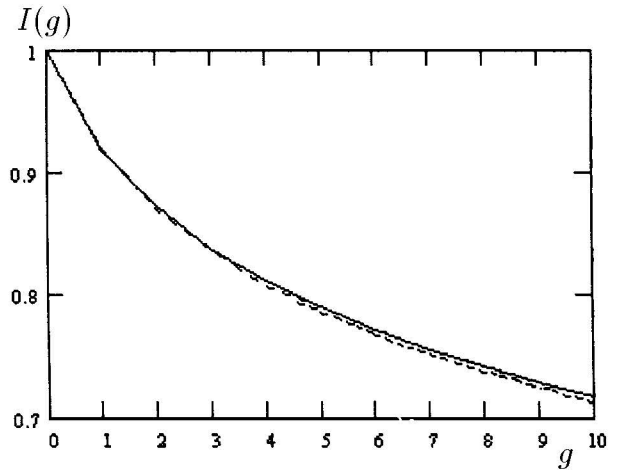


Рис. 2

является следствием того факта, что (5) есть не что иное, как другой формат разложения исходной формулы (4); при этом, разумеется, применение изложенного выше метода нахождения параметра R в случаях формул (4) и (5) приводит к разным значениям.

2. Вычисление β -функции модели $g(\varphi^a \varphi^a)^2$, $a = 1, 2$, в 4-мерном пространстве-времени. Как известно [8, 9], первые пять членов ряда для β -функции модели $g(\varphi^a \varphi^a)^2$, $a = 1, 2$, вычисленные в MS -схеме, имеют вид

$$\beta^{MS}(g) \cong \frac{5}{3}g^2 - \frac{10}{3}g^3 + 20.043g^4 - 175.257g^5 + 1922.33g^6. \quad (8)$$

Применим метод к функции $f(g) = \exp\{-\beta(g)/g\}$. Раскладывая $f(g)$ в ряд и оставляя первые шесть членов, отвечающие известным членам ряда для β -функции, будем иметь:

$$f(g) = 1 - 1.6667g + 4.7222g^2 - 26.3705g^3 + 219.17g^4 - 2321.02g^5.$$

В табл. 2 приведены коэффициенты $B_{k/4}$, полученные путем решения системы (6).

Т а б л и ц а 2

α	B_α	α	B_α	α	B_α
1/4	1.0	7/4	5.445	14/4	858.3
2/4	1.1	9/4	17.532	15/4	2097.9
3/4	1.31	10/4	34.609	17/4	13526
5/4	2.273	11/4	72.21	18/4	36010
6/4	3.380	12/4	361.8	19/4	98800

Результат вычисления β -функции для $0 \leq g \leq 20$ представлен на рис. 3. Относительная погрешность для всех значений g не превосходит 0.1. В рассмотренном интервале значений константы связи величина $\beta(g)$ возрастает, как $g^{1.36}$. Подчеркнем, что в рамках настоящего подхода получаемая для вычисляемой величины погрешность есть абсолютная погрешность, т. е. с учетом указанной выше точности

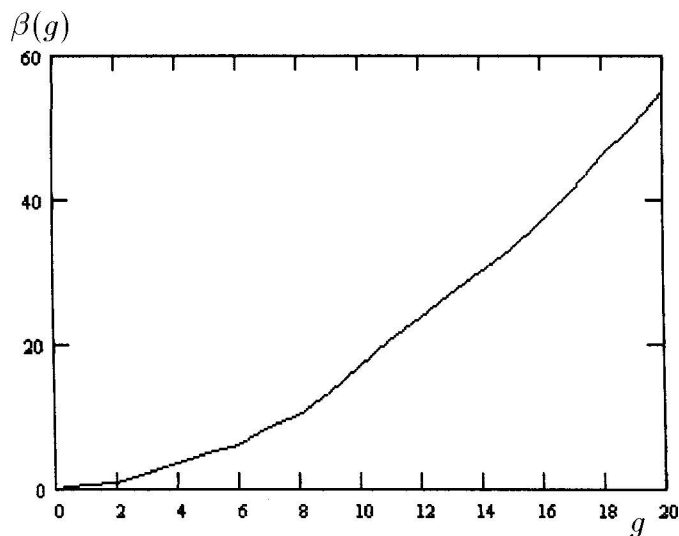


Рис. 3

кривая, представленная на рис. 3, есть кривая, которая могла бы быть получена суммированием ряда (8) с учетом всех его коэффициентов.

Литература

1. Belokurov V.V., Shavgulidze E.T., Solovyev Yu.P. // Mod. Phys. Lett. 1995. **A10**, No. 39. P. 3033.
2. Belokurov V.V., Kamchatny V.V., Shavgulidze E.T., Solovyev Yu.P. // Mod. Phys. Lett. 1997. **A12**, No. 10. P. 661.
3. Белокуров В.В., Соловьев Ю.П., Шавгулидзе Е.Т. // ТМФ. 1996. **109**. С. 51.
4. Белокуров В.В., Соловьев Ю.П., Шавгулидзе Е.Т. // Фундамент. и прикл. матем. 1997. **3**, № 3. С. 693.
5. Белокуров В.В., Соловьев Ю.П., Шавгулидзе Е.Т. // Фундамент. и прикл. матем. 1999. **5**, № 2. С. 363.
6. Белокуров В.В., Соловьев Ю.П., Шавгулидзе Е.Т. // Успехи матем. наук. 1997. **52**, № 2. С. 153.
7. Белокуров В.В., Соловьев Ю.П., Шавгулидзе Е.Т. // Успехи матем. наук. 1999. **53**, № 3. С. 153.
8. Kazakov D.I. // Phys. Lett. 1983. **B133**. P. 406.
9. Chetyrkin K.G., Gorishny S.G., Larin S.A., Tkachev F.V. // Phys. Lett. 1983. **B132**. P. 351.

Поступила в редакцию
14.06.00

УДК 538.9

КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В СПИНОВЫХ СИСТЕМАХ

Е. Р. Алабердин

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

E-mail: zhreal@imail.ru

Исследуются спиновые возбуждения в системе многих частиц (электронов) с сильным короткодействующим обменным взаимодействием между ними. Для решения задачи предлагается перейти от операторов спиновой плотности электронов к новым операторам, описывающим рождение и уничтожение спиновых возбуждений. Диагонализация полученного при этом приближенного гамильтониана сводится к решению секулярного уравнения, характеризующего спектр спиновых возбуждений в системе. Получено решение этого уравнения для малых значений импульса.

Особенностью ВТСП-материалов является наличие сильного (короткодействующего) обменного взаимодействия между электронами проводимости. Известно [1], что электрон-фононное взаимодействие может эффективно усиливаться при наличии флуктуаций электронных спинов.

Начальным этапом может быть исследование коллективных возбуждений в спиновых системах. Характерной моделью спиновых систем может служить система многих частиц (электронов) с сильным короткодействующим обменным взаимодействием между ними.

Для исследования этой модели в настоящей работе предлагается перейти от операторов спиновой плотности электронов к новым операторам, описывающим рождение и уничтожение спиновых возбуждений. Такое преобразование позволяет при определенном «повороте» операторов спиновой плотности приближенно считать новые операторы бозе-операторами. «Поворот» спиновых операторов осуществляется при помощи обобщенного канонического

преобразования. Угол «поворота» выбирается таким образом, чтобы при усреднении по квантовым состояниям функционал свободной энергии достигал минимума. В этом случае задача получения спектра спиновых возбуждений упрощается и сводится к диагонализации квадратичной по новым операторам части гамильтониана спиновой системы в первом порядке теории возмущений.

Гамильтониан исследуемой модели:

$$H = \int d\mathbf{r} \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left(\frac{p^2}{2m_e} - \mu \right) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' J(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \times \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \tau_{\alpha\gamma}^{\nu} \psi_{\gamma}(\mathbf{r}) \psi_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{r}') \tau_{\alpha'\gamma'}^{\nu} \psi_{\gamma'}(\mathbf{r}'). \quad (1)$$

Здесь μ — химический потенциал системы; $\psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r})$, $\psi_{\alpha}(\mathbf{r})$ — операторы рождения и уничтожения электронов; τ^{ν} — матрицы Паули, $\nu = 1, 2, 3$ (крестиком обозначен комплексно сопряженный оператор).