

УДК 530.145

ЭФФЕКТИВНЫЙ ЛАГРАНЖИАН ДЛЯ ОПИСАНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ МАГНИТНОГО И ХРОМОМАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

В. Ч. Жуковский, В. В. Худяков, А. С. Разумовский

(кафедра теоретической физики)

E-mail: th180@phys.msu.su

Рассмотрен вклад в поляризацию вакуума кварков, взаимодействующих с интерферирующими электромагнитным и неабелевым фоновым калибровочным полями в $SU(3)$ модели квантовой хромодинамики. Для случая интерференции магнитного поля H и хромомагнитного поля B в однопетлевом приближении вычислен эффективный лагранжиан, являющийся обобщением лагранжиана Гейзенберга–Эйлера квантовой электродинамики и точно учитывающий вклад полей H и B .

Введение

В последнее время большое число работ посвящается исследованию вакуума и вакуумных эффектов в различных моделях квантовых неабелевых полей. Однако, несмотря на все усилия продвинуться в этом направлении, точные результаты возможно получить лишь в ограниченном числе задач. В большинстве случаев результат получается в виде разложения в ряд по какому-либо малому параметру теории, и лишь иногда удается вычислить непертурбативные слагаемые. В результате до сих пор структура вакуума калибровочных моделей остается далеко не ясной. Предложены различные модели вакуума, которые позволяют получить некоторое представление о его строении и с той или иной точностью оценить величины физических эффектов, связанных с его нетривиальной природой. Так, одной из наиболее характерных черт вакуума КХД является наличие в нем длинноволновых случайных флуктуаций глюонного поля. Эти особенности легли в основу стохастической модели вакуума, рассмотренной, например, в работе [1]. Настоящая статья посвящена дальнейшему изучению структуры вакуума с использованием модели постоянного фонового поля, которая позволяет описать некоторые наиболее характерные особенности вакуума, связанные с его непертурбативной природой.

В настоящей статье вначале приводится и анализируется полученный в работе [2] (см. также [3]) эффективный лагранжиан рассматриваемой модели интерферирующих абелева и неабелева полей, записанный в виде интегрального представления как функция инвариантов электромагнитного и глюонного полей. Далее в однопетлевом приближении определяется точное выражение для эффективного лагранжиана типа Гейзенберга–Эйлера для случая интерференции абелева магнитного поля H и хромомагнитного поля B цветовой группы $SU(3)$. Затем исследуется возможность разложения полученного результата в ряд по степеням малого параметра, пропорционального обратной величине напряженности фонового хромомагнитного поля, и оценивается ве-

личина интерференционного вклада в эффективный лагранжиан. Обсуждается возможность применения усреднения по вакуумным полям с использованием стохастической модели вакуума [1].

1. Интерференция произвольных постоянных полей

Рассмотрим динамику фермионов на фоне конденсата калибровочных полей группы $SU(3) \times U(1)$. В этом случае дираковский лагранжиан имеет вид

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

и содержит удлиненную производную $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu - igB_\mu^a T^a$. Здесь T^a — генераторы цветовой группы $SU(3)$. Мы пренебрегаем флуктуациями калибровочных полей на фоне внешнего поля $\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu$ и поля конденсата $\bar{G}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \bar{B}_\nu^a - \partial_\nu \bar{B}_\mu^a + gf^{abc}\bar{B}_\mu^b \bar{B}_\nu^c$. В дальнейшем предполагается, что эти калибровочные поля являются ковариантно постоянными, т.е. удлиненная производная коммутирует с тензорами калибровочных полей: $[D_\mu, \bar{F}_{\alpha\beta}] = 0$, $[D_\mu, \bar{G}_{\alpha\beta}^a] = 0$.

Как известно [4], эффективное действие $\Gamma_A = \int d^4x \mathcal{L}_A$ калибровочного поля A , отвечающее однопетлевому лагранжиану $\mathcal{L}_A$, записывается в виде

$$i\Gamma_A = \ln \{ \det [(i\gamma^\mu D_\mu - m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)^{-1}] \}.$$

Здесь второй множитель под знаком детерминанта устраняет вклад нейтральных фермионов, не взаимодействующих с калибровочным полем.

При вычислении эффективного лагранжиана удобно использовать инварианты калибровочного поля

$$\mathcal{I}_1 = 2\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad \mathcal{I}_2 = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\gamma\delta},$$

где $\mathcal{F}_{\mu\nu} = e\bar{F}_{\mu\nu} + g\bar{G}_{\mu\nu}^a T^a$.

Опуская подробные вычисления с привлечением метода собственного времени Фока–Швингера, кото-

рые приведены в работе [2], запишем сразу окончательное выражение для эффективного лагранжиана:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-im^2 s} \times \\ \times \text{tr}_c \left[\frac{i\mathcal{I}_2}{2} \frac{s^2 \cos\left(\frac{s}{2}\sqrt{\mathcal{I}_1 + i\mathcal{I}_2}\right) + \cos\left(\frac{s}{2}\sqrt{\mathcal{I}_1 - i\mathcal{I}_2}\right)}{\cos\left(\frac{s}{2}\sqrt{\mathcal{I}_1 + i\mathcal{I}_2}\right) - \cos\left(\frac{s}{2}\sqrt{\mathcal{I}_1 - i\mathcal{I}_2}\right)} + 1 \right], \quad (1)$$

где tr_c означает след по цветовым индексам. В работе [2] в соответствующую формулу под знаком следа единица входит с обратным знаком. Этот факт следует считать опечаткой, поскольку все дальнейшие результаты в [2] получены на основе правильного выражения для эффективного лагранжиана.

2. Интерференция магнитного и хромагнитного полей

Рассмотрим частный случай интерференции чисто магнитного и хромагнитного полей в модели $SU(3) \times U(1)$ и рассчитаем эффективный лагранжиан более простым способом. А именно потенциалы калибровочных полей выберем в следующем виде:

$$\bar{A}_\mu = H x_{1g\mu 2}, \quad \bar{B}_\mu^a = B x_{1g\mu 2} \frac{\lambda^3}{2} \delta_3^a,$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, λ^3 — матрица Гелл-Манна, H и B — напряженности магнитного и хромагнитного полей соответственно. Используя квадратированное уравнение Дирака

$$\left[\Pi^2 - m^2 + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} (e\bar{F}^{\mu\nu} + g\bar{G}^{\mu\nu}) \right] \psi = 0,$$

находим энергетический спектр возбуждений фермионов:

$$\varepsilon_{n,\lambda,\sigma}^2 = \left| eH + gB \frac{\lambda}{2} \right| (2n + 1 - \sigma) + k_3^2 + m^2,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad \sigma = \pm 1, \quad \lambda = \{-1, 0, 1\},$$

где k_3 — проекция импульса на третью пространственную ось. Суммируя этот спектр по дискретным квантовым числам и интегрируя по k_3 , с учетом кратности вырождения энергетических уровней получаем эффективное действие в следующем виде:

$$\Gamma_A = -\frac{\left(\int d^4x\right)}{2} \sum_{n,\lambda,\sigma} \frac{|eH + gB\lambda/2|}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \times \\ \times \exp \left\{ -s \left[|eH + gB\lambda/2| (2n + 1 + \sigma) + m^2 \right] \right\}.$$

После небольших преобразований получаем эффективный лагранжиан

$$\mathcal{L}_A = -\frac{m^4}{8\pi^2} \sum_{\lambda=-1,0,1} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-s} \times \\ \times \left\{ (h + \lambda b) \text{cth}[s(h + \lambda b)] - \frac{1}{s} \right\}, \quad (2)$$

где мы ввели безразмерные напряженности магнитного и хромагнитного полей $h = eH/m^2$, $b = gB/(2m^2)$. Последнее выражение (2) может быть получено и непосредственно из исправленного лагранжиана (1) статьи [2] в пределе $\mathcal{I}_1 = 4(eH + gB\lambda/2)$, $\mathcal{I}_2 = 0$.

Легко видеть, что интеграл в (2) расходится на нижнем пределе. Для регуляризации данной расходимости выделим расходящуюся часть в отдельное слагаемое:

$$\mathcal{L}_{\text{div}} = \frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-s} (h^2 + \frac{2}{3}b^2). \quad (3)$$

Эта расходимость естественным образом устраняется при помощи перехода к перенормированным зарядам e_r , g_r и напряженностям полей H_r , B_r :

$$H_r^2 = H^2 \left(1 - \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-s} \right), \\ e_r^2 = e^2 \left(1 - \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-s} \right)^{-1}, \\ B_r^2 = B^2 \left(1 - \frac{g^2}{24\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-s} \right), \\ g_r^2 = g^2 \left(1 - \frac{g^2}{24\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-s} \right)^{-1}.$$

После такой перенормировки, равносильной вычитанию расходящегося вклада (3), эффективный лагранжиан вычисляется точно. Комбинируя несколько табличных интегралов [5], можно вывести следующее выражение:

$$\xi(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^2} \left(a \text{cth} ax - \frac{1}{x} - \frac{1}{3} a^2 x \right) dx = \\ = -\ln(2a) \left(\frac{a^3}{3} - a + \frac{1}{2} \right) + \frac{a^3}{3} - \frac{1}{4} - \\ - 4a^2 \left[\frac{d}{dz} \zeta \left(z, \frac{1}{2a} \right) \right] \Big|_{z=-1}, \quad (4)$$

где $\zeta(z, \frac{1}{2a})$ — ζ -функция Римана [5]. Таким образом, регуляризованный эффективный лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L}_A = -\frac{m^4}{8\pi^2} [\xi(b+h) + \xi(|b-h|) + \xi(h)]. \quad (5)$$

Если в выражении (2) положить $b = 0$ и отбросить суммирование по цветам, то $\mathcal{L}_A$ переходит в хорошо известный в электродинамике лагранжиан Гейзенберга–Эйлера. Используя выражение (4), легко можно записать явное выражение для лагранжиана Гейзенберга–Эйлера, точно учитывающее вклад внешнего поля.

3. Разложение по слабому электромагнитному полю

Разложим эффективный потенциал в ряд по слабому магнитному полю $eH \ll m^2$. Тогда, используя (2), для слагаемого порядка h^4 получим

$$\mathcal{L}_{BH}^4 = -\frac{m^4 h^4}{12\pi^2} \int_0^\infty e^{-x} x \left[-3 \operatorname{cth}(bx)^4 + 4 \operatorname{cth}(bx)^2 - \frac{31}{30} + bx(3 \operatorname{cth}(bx)^5 - 5 \operatorname{cth}(bx)^3 + 2 \operatorname{cth}(bx)) \right] dx. \quad (6)$$

Последний интеграл можно вычислить точно:

$$\mathcal{L}_{BH}^4 = -\frac{m^4 h^4}{8\pi^2} \times \left[-\frac{1}{45} + \frac{1}{18b^2} + \frac{1}{6b^3} + \frac{1}{4b^4} - \frac{\Psi(1, \frac{1}{2b})}{6b^5} - \frac{\Psi(2, \frac{1}{2b})}{48b^6} \right], \quad (7)$$

где $\Psi(n, x) = \frac{d^n}{dx^n} \Psi(x)$ и $\Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln[\Gamma(x)]$ — известная пси-функция. Идентичный ответ можно получить, раскладывая (5) в ряд по параметру h , малому по сравнению с b .

Разложение (7) в ряд Тейлора по степеням b^{-1} при $b \rightarrow \infty$ ($gB \gg m^2$) дает

$$\mathcal{L}_{BH}^4 = -\frac{m^4 h^4}{8\pi^2} \left[-\frac{1}{45} + \frac{1}{18b^2} - \frac{1}{6b^3} + \frac{1}{4b^4} + O\left(\frac{1}{b^5}\right) \right]. \quad (8)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках соответствует чистой электродинамике при наличии внешнего магнитного поля, а второе слагаемое, пропорциональное b^{-2} , в рамках сделанных нами предположений представляет собой малую поправку за счет хромагнитного поля. Следует отметить, что в случае интерференции электрического и хромагнитного полей соответствующая поправка пропорциональна b .

В работе [2] использовалась стохастическая модель вакуума [1]. С этой целью использовалось усреднение хромагнитного поля по гауссову распределению

$$P(g\mathbf{B}^a) d^3(g\mathbf{B}^a) \equiv \left(\frac{3}{2\pi \langle g^2 \mathbf{B}_a^2 \rangle_G} \right)^{3/2} \times \exp \left[\frac{-3(g\mathbf{B}^a)^2}{2\langle g^2 \mathbf{B}_a^2 \rangle_G} \right] d^3(g\mathbf{B}^a). \quad (9)$$

Однако гауссово интегрирование нельзя применять к разложению (8), поскольку интегрирование по $d^3(g\mathbf{B}^a)$ в (9) ведется в пределах от 0 до ∞ , в то время как (8) справедливо только при $gB \gg m^2$. В работе [2] величина параметра $m^2/\sqrt{g^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}$ оценивается в пределах 10^{-4} – 10^{-3} , что и используется при оценке интеграла (см. (39) в [2]). Такая оценка фактически соответствует разложению (8), поэтому нам представляется, что применение стохастического усреднения в работе [2] было произведено некорректно.

Заключение

Таким образом, в рамках подхода, основанного на применении метода точных решений в модели постоянного поля для описания глюонного фонового поля, мы получили оценку вклада интерференции абелева и неабелева калибровочных полей в эффективный лагранжиан. При этом в случае чисто электромагнитного поля для эффективного лагранжиана удастся получить явное выражение через ζ -функцию и ее производную. Представляет интерес дальнейшее развитие данного подхода для исследования воздействия внешних электромагнитных и вакуумных калибровочных полей на распространение света с учетом их флуктуирующего характера.

Литература

1. Симонов Ю.А. // УФН. 1996. **166**, №4. С. 337.
2. Elze H.-Th., Müller B., Rafelski J. E-print Archive: hep-ph/9811372.
3. Rafelski J., Elze H.-Th. E-print Archive: hep-ph/9806389.
4. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В. Калибровочные поля. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
21.06.00