

УДК 514.752.4; 517.95

ИССЛЕДОВАНИЕ ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ОТВЕЧАЮЩЕЙ ДВУХСОЛИТОННОМУ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ sin-ГОРДОНА

Д. В. Тихомиров

(кафедра математики)

E-mail: dmitrytv@mtu-net.ru

Исследована псевдосферическая поверхность, отвечающая двухсолитонному решению уравнения sin-Гордона. Для построения поверхности применяется известное преобразование Бэклунда. Получены в параметрическом виде выражения для линий уровня двухсолитонной поверхности и исследованы их геометрические свойства.

1. Преобразование Бэклунда псевдосферических поверхностей

Рассмотрим уравнение sin-Гордона

$$z_{xt} = \sin z. \quad (1)$$

Уравнение (1) принадлежит Λ^2 -классу дифференциальных уравнений [1], которому в трехмерном евклидовом пространстве E^3 соответствует метрика чебышевской сети на поверхности с кривизной $K \equiv -1$:

$$ds^2 = dx^2 + 2 \cos z(x, t) dx dt + dt^2. \quad (2)$$

Отметим, что если $z = z(x, t)$ — решение уравнения (1), то в геометрическом смысле $z(x, t)$ — сетевой угол чебышевской сети [2]. Известно, что широкий класс точных решений уравнения (1) может быть получен методом преобразования Бэклунда (ПБ). Геометрическое содержание ПБ состоит в том, что если в трехмерном евклидовом пространстве E^3 задана псевдосферическая поверхность S с радиус-вектором $\mathbf{r}$, то, исходя из этой поверхности S , можно построить новую поверхность S^* той же кривизны, определяемую радиус-вектором $\mathbf{R}$.

В настоящей статье исследуется поверхность, соответствующая двухсолитонному решению уравнения (1). Приведем форму ПБ в этом случае [3]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{2p}{1+p^2} \left(\tau_1 \cos \frac{z_2^{k,p}}{2} + \tau_2 \sin \frac{z_2^{k,p}}{2} \right), \quad (3)$$

$$\tau_1 = \frac{\mathbf{r}_x + \mathbf{r}_t}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \cos z_1^k}}, \quad \tau_2 = \frac{\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_t}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos z_1^k}},$$

$$z_1^k = 4 \operatorname{arctg} e^{kx + \frac{1}{k}t},$$

$$z_2^{k,p} = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{k+p}{k-p} \cdot \frac{e^{kx + \frac{1}{k}t} - e^{px + \frac{1}{p}t}}{1 + e^{(k+p)x + (\frac{1}{k} + \frac{1}{p})t}} \right),$$

$$k, p = \text{const},$$

где $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$ — радиус-векторы соответственно двухсолитонной и односолитонной поверхностей, а z_1^k

и $z_2^{k,p}$ — одно- и двухсолитонные решения уравнения (1). В качестве односолитонной рассматривается винтовая поверхность [4], радиус-вектор которой задается следующим образом:

$$\mathbf{r} = \left(-\frac{2k}{1+k^2} \frac{\sin \varphi}{\operatorname{ch} \psi}; \frac{2k}{1+k^2} \frac{\cos \varphi}{\operatorname{ch} \psi}; -\frac{2k}{1+k^2} \operatorname{th} \psi + x + t \right),$$

где $\varphi = x - t$, $\psi = kx + t/k$.

2. Линии уровня двухсолитонной поверхности

Исследуем аналитический вид линий уровня двухсолитонной поверхности.

Как видно из метрики (2), поверхности с данной квадратичной формой имеют особенности (нерегулярные ребра или острия) при $z = \pi n$, где n — целое число, при условии обращения в нуль дискриминанта метрики. Предполагая, что числовые параметры k и p решения $z_2^{k,p}$ не равны нулю, сделаем следующее линейное преобразование координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ kp & kp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

в результате которого двухсолитонное решение примет удобный для нахождения линий уровня вид:

$$z_2^{k,p} = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{k+p}{k-p} \cdot \frac{e^{-(k-p)u} - e^{(k-p)u}}{e^{-(k+p)v} + e^{(k+p)v}} \right). \quad (4)$$

Рассмотрим случай, когда $|k| \neq |p|$. Полагая в (4) $z_2^{k,p} = 0, \pi, -\pi$, получаем соответственно три линии уровня.

Линия уровня, которая отвечает $z_2^{k,p} = 0$, в исходных переменных представляет собой прямую, проходящую через начало координат (в плоскости параметров (x, t)):

$$kpx - t = 0;$$

линии уровня, определяемые решениями $z_2^{k,p} = \pi$ и $z_2^{k,p} = -\pi$, задаются в виде

$$\begin{cases} x(v) = \pm \frac{1}{k-p} \operatorname{arsh} \left(\frac{k-p}{k+p} \operatorname{ch}((k+p)v) \right) + v, \\ t(v) = \mp \frac{kp}{k-p} \operatorname{arsh} \left(\frac{k-p}{k+p} \operatorname{ch}((k+p)v) \right) + kp v, \end{cases}$$

где верхние знаки относятся к $z_2^{k,p} = \pi$, нижние — к $z_2^{k,p} = -\pi$. Перейдем к построению аналитических выражений для линий уровня в случае $|k| = |p|$. Здесь возможны два варианта.

1. Случай $k = -p$. Такой выбор коэффициентов соответствует тривиальному решению и не представляет интереса в исследовании.

2. Случай $k = p$. При этом возникает неопределенность. Вычислим соответствующий предел:

$$\lim_{k \rightarrow p} \frac{k+p}{k-p} \frac{e^{-(k-p)u} - e^{(k-p)u}}{e^{-(k+p)v} + e^{(k+p)v}} = -\frac{4pu}{e^{-2pv} + e^{2pv}},$$

т. е.

$$z_2^{p,p} = -4 \operatorname{arctg} \left(\frac{4pu}{e^{-2pv} + e^{2pv}} \right).$$

Данный случай отвечает взаимодействию двух солитонов одинаковой амплитуды. Аналогично проделанной выше процедуре для $|k| \neq |p|$ получим линии уровня поверхности, отвечающие решению $z_2^{p,p}$.

Линия уровня, определяемая решением $z_2^{p,p} = 0$, в исходных переменных представляет собой прямую,

проходящую через начало координат (в плоскости параметров (x, t)):

$$p^2 x - t = 0,$$

линии уровня, соответствующие решениям $z_2^{p,p} = \pi$ и $z_2^{p,p} = -\pi$, задаются в виде

$$\begin{cases} x(v) = \mp \frac{1}{2p} \operatorname{ch}(2pv) + v, \\ t(v) = \pm \frac{p}{2} \operatorname{ch}(2pv) + p^2 v, \end{cases}$$

где верхние знаки относятся к $z_2^{p,p} = \pi$, нижние — к $z_2^{p,p} = -\pi$.

Заклание

Результаты исследования линий уровня $z = \pi n$ псевдосферической поверхности, соответствующей двухсолитонному решению уравнения sin-Гордона (1), показывают, что двухсолитонная поверхность характеризуется тремя гладкими линиями уровня (в отличие от односолитонной поверхности — псевдосферы, имеющей одну линию уровня — прямую, отвечающую ребру возврата), расположенными центрально-симметрично относительно начала координат. Симметрия линий уровня отражает свойства симметрии уравнения sin-Гордона. Также следует отметить возможный случай, когда линия уровня в пространстве, отвечающая решению $z_2^{k,p} = 0$,

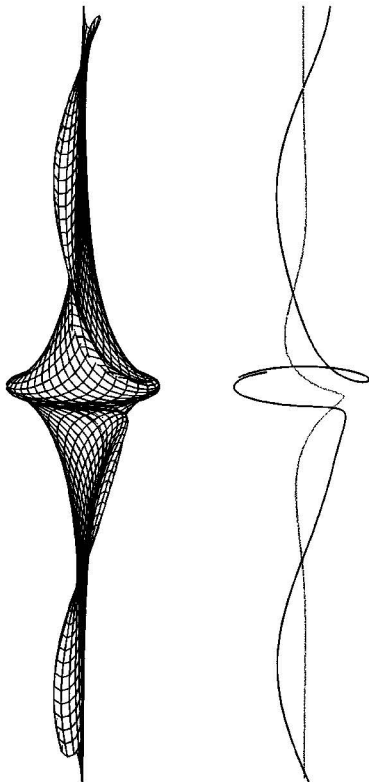


Рис. 1

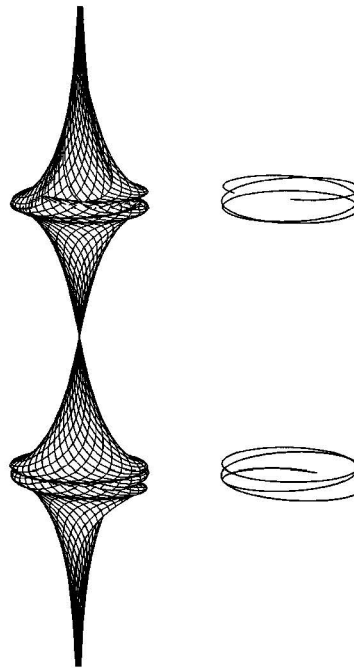


Рис. 2

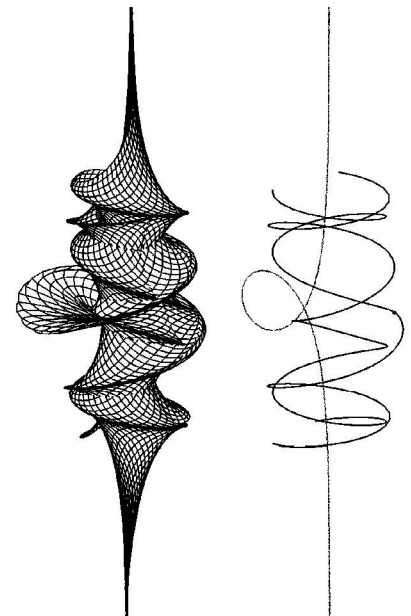


Рис. 3

вырождается в линию на плоскости, что соответствует $kp = 1$.

В заключение представим аналитический вид радиус-вектора двухсолитонной поверхности, полученной методом ПБ (3):

$$\mathbf{R} = \left(-\frac{2k}{1+k^2} \frac{\sin \varphi}{\operatorname{ch} \psi} + \frac{4p}{1+p^2} \left[\frac{\cos z_2^{k,p}}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos z_1^k}} \times \right. \right. \\ \times \frac{\sin \varphi \operatorname{sh} \psi}{\operatorname{ch}^2 \psi} - \frac{\sin z_2^{k,p}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos z_1^k}} \times \\ \times \frac{k}{1+k^2} \frac{2 \cos \varphi \operatorname{ch} \psi - \left(k - \frac{1}{k}\right) \sin \varphi \operatorname{sh} \psi}{\operatorname{ch}^2 \psi} \left. \right]; \\ \frac{2k}{1+k^2} \frac{\cos \varphi}{\operatorname{ch} \psi} + \frac{4p}{1+p^2} \left[-\frac{\cos z_2^{k,p}}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos z_1^k}} \times \right. \\ \times \frac{\cos \varphi \operatorname{sh} \psi}{\operatorname{ch}^2 \psi} - \frac{\sin z_2^{k,p}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos z_1^k}} \frac{k}{1+k^2} \times \\ \times \frac{2 \sin \varphi \operatorname{ch} \psi + \left(k - \frac{1}{k}\right) \cos \varphi \operatorname{sh} \psi}{\operatorname{ch}^2 \psi} \left. \right]; \\ -\frac{2k}{1+k^2} \operatorname{th} \psi + x + t + \frac{4p}{1+p^2} \times$$

$$\times \left[\frac{\cos z_2^{k,p}}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos z_1^k}} (-\operatorname{ch}^{-2} \psi + 2) - \right. \\ \left. - \frac{\sin z_2^{k,p}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos z_1^k}} \frac{k^2-1}{k^2+1} \operatorname{ch}^{-2} \psi \right] \Bigg) .$$

На рис. 1 ($k = -1$, $p = 5$), рис. 2 ($k = -\frac{9}{10}$, $p = \frac{10}{9}$) и рис. 3 ($k = \frac{9}{10}$, $p = \frac{10}{9}$) представлен внешний вид линий уровня и соответствующих поверхностей в пространстве для заданных коэффициентов. Рисунки подготовлены в математическом пакете MathCad 2000 Professional.

Автор выражает свою признательность проф. А.Г. Попову за полезные обсуждения статьи.

Литература

1. Позняк Э.Г., Попов А.Г. // Докл. РАН. 1993. 332, № 4. С. 418.
2. Позняк Э.Г., Попов А.Г. Уравнение синус-Гордона: геометрия и физика // Новое в жизни, науке, технике. Сер. Математика, кибернетика. 6. М.: Знание, 1991.
3. Bianchi Z. Lezioni di geometria differenziale. V. 1, pt. 2. Bologna, 1927.
4. Зададаев С.А. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1994. № 2. С. 41.

Поступила в редакцию
19.07.00

УДК 519.6

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

В. Н. Титаренко, А. Г. Ягола, Н. Н. Николаева

(кафедра математики)

E-mail: yagola@inverse.phys.msu.su

Рассматривается задача Коши для двумерного уравнения Лапласа при условии принадлежности точного решения некоторому компактному множеству. При заданных погрешностях с помощью метода отсечения выпуклых многогранников строятся области, которым принадлежат приближенные решения некоторых задач Коши.

1. Постановка задачи

Особенностью некорректных задач является невозможность оценить близость приближенного решения задачи к точному [1, 2]. Но если известно, что точное решение задачи принадлежит некоторому компактному множеству, то задача сводится к нахождению квазирешения и возможна оценка его погрешности. В настоящей работе рассматривается применение метода отсечения выпуклых многогранников, предложенного в [3], при решении некоторых задач Коши для двумерного уравнения Лапласа при условии принадлежности точного решения компактному множеству.

Задача Коши для уравнения Лапласа является классической некорректной задачей, которой посвящены работы многих авторов (см., напр., [4–7]). Пусть задана некоторая ортогональная система координат (u, v) . Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа в прямоугольнике $D = [0, a] \times [0, b]$:

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & (u, v) \in D, \\ w(u, 0) = \varphi(u), & u \in [0, a], \\ w_v(u, 0) = \psi(u), & u \in [0, a]. \end{cases}$$

Считаем, что $\varphi(u), \psi(u) \in L_2[0, a]$. Необходимо найти функцию $\mu(u) = w(u, b)$ или $\mu(u) = w_v(u, b)$