

УДК 551.466

НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕХАНИЗМ ГЕНЕРАЦИИ ЦУНАМИ КОЛЕБАНИЯМИ ДНА

М. А. Носов, С. Н. Скачко

(кафедра физики моря и вод суши)

E-mail: psiwc47@phys.msu.su

Исследуется нелинейный механизм генерации длинной гравитационной волны в океане при быстрых колебаниях дна. Выявлена связь амплитуды волны с амплитудой, частотой, продолжительностью колебаний дна и горизонтальной протяженностью источника.

В работах [1, 2] нами было показано, что если частота вертикальных колебаний участка дна океана при подводном землетрясении превышает величину $g^{1/2}H^{-1/2}$, причем колебания не сопровождаются остаточными смещениями, то эффективное возбуждение поверхностных гравитационных волн (цунами) невозможно. Результат получен в рамках линейной потенциальной теории. Но при землетрясении амплитуда скорости колебания дна может достигать значительной величины, когда линейная теория становится неприменима и на передний план выходят нелинейные эффекты. Например, нелинейность может проявляться в том, что возбуждается длинная гравитационная волна в результате «детектирования» быстрых колебаний водного слоя. Предмет настоящей работы состоит в выявлении связей характеристик такой длинной волны и параметров колебаний участка дна.

Базовая математическая модель

Будем рассматривать безграничный вдоль оси Ox слой идеальной несжимаемой однородной жидкости постоянной толщины H в поле силы тяжести. Начало прямоугольной системы координат Oxz поместим на невозмущенной свободной поверхности, ось Oz направим вертикально вверх. Предположим, что в жидкости сосуществуют колебательное (быстрое) и усредненное (медленное) движения. Компоненты полной скорости течения u^Σ и w^Σ представим в виде суммы скоростей колебательного и усредненного движений:

$$u^\Sigma(x, z, t) = u(x, z) \cos(\omega t) + U(x, z, t), \quad (1)$$

$$w^\Sigma(x, z, t) = w(x, z) \cos(\omega t) + W(x, z, t). \quad (2)$$

Подставляя выражения (1) и (2) в левую часть уравнения Эйлера и производя операцию усреднения по периоду колебаний (обозначена горизонтальной чертой сверху), получаем

$$\overline{\frac{\partial u^\Sigma}{\partial t} + u^\Sigma \frac{\partial u^\Sigma}{\partial x} + w^\Sigma \frac{\partial u^\Sigma}{\partial z}} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} - f_x,$$

$$\overline{\frac{\partial w^\Sigma}{\partial t} + u^\Sigma \frac{\partial w^\Sigma}{\partial x} + w^\Sigma \frac{\partial w^\Sigma}{\partial z}} = \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} - f_z,$$

где

$$f_x(x, z) = -\frac{1}{2} \left[u(x, z) \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} + w(x, z) \frac{\partial u(x, z)}{\partial z} \right], \quad (3)$$

$$f_z(x, z) = -\frac{1}{2} \left[u(x, z) \frac{\partial w(x, z)}{\partial x} + w(x, z) \frac{\partial w(x, z)}{\partial z} \right]. \quad (4)$$

Таким образом в уравнениях для скорости среднего движения возникают дополнительные члены f_x и f_z , которые мы будем интерпретировать как компоненты не зависящей от времени массовой силы.

Решение вспомогательной линейной задачи

Рассмотрим вспомогательную линейную задачу, решение которой позволит определить поле скорости течения в жидкости $\mathbf{v}(x, z, t)$ при колебаниях участка дна, происходящих по закону $\eta(x, t)$. Задачу будем решать относительно потенциала скорости течения $F(x, z, t)$:

$$F_{xx} + F_{zz} = 0, \quad (5)$$

$$F_{tt} = -gF_z, \quad z = 0, \quad (6)$$

$$F_z = \eta_t, \quad z = -H. \quad (7)$$

Уравнение Лапласа (5) с граничными условиями на поверхности (6) и на дне (7) решается стандартным методом разделения переменных. Опуская элементарные выкладки, выпишем общее решение задачи в виде разложений Лапласа и Фурье по временной и пространственной координатам соответственно:

$$F(x, z, t) = -\frac{1}{4\pi^2 i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dk \times \\ \times \frac{p \exp(pt - ikx) \operatorname{ch}(kz) [gk - p^2 \operatorname{th}(kz)]}{k \operatorname{ch}(kH) [gk \operatorname{th}(kH) + p^2]} G(p, k), \quad (8)$$

где

$$G(p, k) = \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx \exp(-pt + ikx) \eta(x, t).$$

По известному потенциалу стандартным способом вычисляются горизонтальная $u(x, z, t)$ и вертикальная $w(x, z, t)$ компоненты колебательной скорости течения:

$$u(x, z, t) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad w(x, z, t) = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Закон движения дна $\eta(x, t)$ выберем в виде

$$\eta(x, t) = \eta_i(x) \theta(t) \sin(\omega t), \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$\eta_1(x) = \eta_0 \exp(-x^2 a^{-2}),$$

$$\eta_2(x) = \begin{cases} \eta_0, & |x| \leq b, \\ \eta_0 c^{-1}(b - |x|) + 1, & b < |x| \leq b + c, \\ 0, & |x| > b + c, \end{cases}$$

где η_0 и ω — амплитуда и циклическая частота колебаний дна; a, b, c — параметры, характеризующие горизонтальную протяженность и форму пространственного распределения амплитуды колебаний дна; θ — функция Хевисайда. Конкретизация временного закона движения дна дает возможность выполнить интегрирование по параметру dp в выражении (8) аналитически. Переходя к безразмерным переменным

$$k^* = Hk, \quad t^* = t(g/H)^{1/2}, \quad \omega^* = \omega(H/g)^{1/2}, \quad \{x^*, z^*, a^*, b^*, c^*\} = H^{-1}\{x, z, a, b, c\}, \quad (10)$$

после довольно громоздких промежуточных выкладок получаем окончательные формулы для вычисления компонент скорости течения в жидкости при колебаниях дна, описываемых выражением (9) (звездочку здесь и далее опускаем):

$$u(x, z, t) = \frac{\eta_0 \omega}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{\sin(kx) \operatorname{ch}(kz) X_i(k)}{\operatorname{ch}(k) (p_0^2 - \omega^2)} \times \{ \cos(\omega t) [k + \omega^2 \operatorname{th}(kz)] - \cos(p_0 t) [k + p_0^2 \operatorname{th}(kz)] \}, \quad (11)$$

$$w(x, z, t) = -\frac{\eta_0 \omega}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{\cos(kx) \operatorname{ch}(kz) X_i(k)}{\operatorname{ch}(k) (p_0^2 - \omega^2)} \times \{ \cos(\omega t) [k \operatorname{th}(kz) + \omega^2] - \cos(p_0 t) [k \operatorname{th}(kz) + p_0^2] \}, \quad (12)$$

где

$$p_0^2 = k \operatorname{th}(k),$$

$$X_i(k) = \int_{-\infty}^\infty dx \exp(ikx) \eta_i(x).$$

Таким образом, в выражениях (11), (12) под знаком интеграла фигурируют безразмерные переменные, но коэффициенты перед интегралами и сами искомые компоненты скорости течения u и w являются размерными величинами.

Численный расчет компонент скорости течения показал, что в интересующем нас частотном диапазоне ($\omega > 2\pi g^{1/2} H^{-1/2}$) сразу после «включения» колебаний дна каждая точка жидкости начинает совершать гармонические колебания с амплитудой, зависящей только от ее координат. Компоненты скорости течения при этом с хорошей точностью описываются формулами $u(x, z, t) = u(x, z) \cos(\omega t)$, $w(x, z, t) = w(x, z) \cos(\omega t)$. В дальнейших расчетах полагалось, что $u(x, z) = u(x, z, 0)$, $w(x, z) = w(x, z, 0)$. Полученные таким образом функции $u(x, z)$ и $w(x, z)$ подставлялись в выражения (3) и (4) для расчета компонент массовой силы f_x и f_z .

На рис. 1 представлены примеры пространственного распределения силы. Расчет выполнен для распределения амплитуды колебаний дна $\eta_1(x)$ при значениях параметра $a = 1, 3$ и 5 . Видно, что по мере

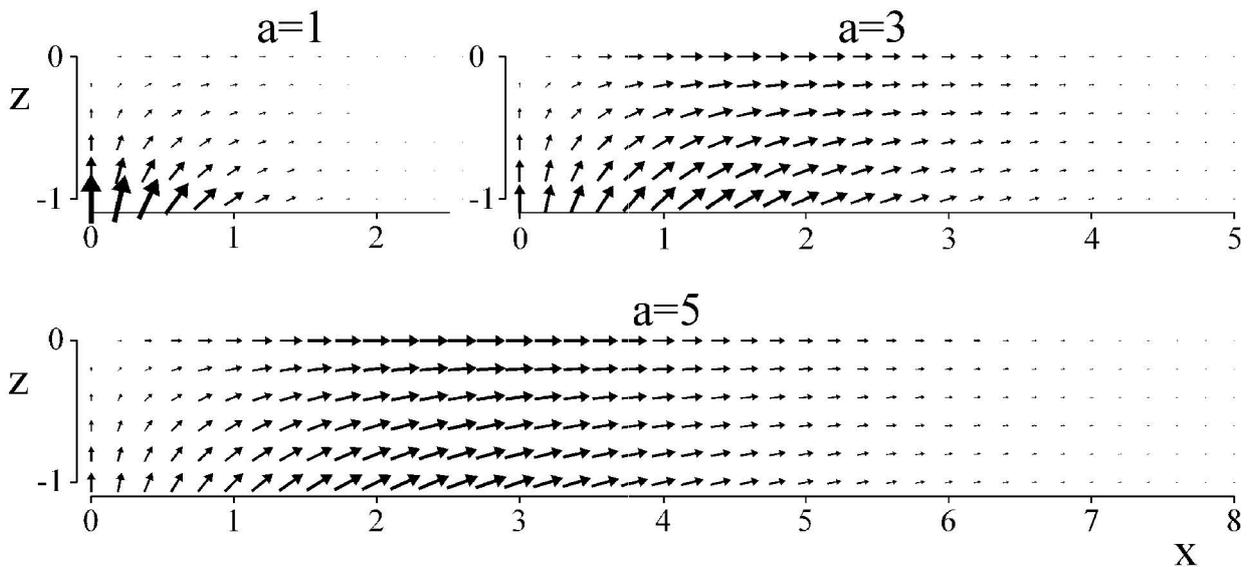


Рис. 1. Пространственное распределение массовой силы f , рассчитанное для движения дна по закону η_1 при $a = 1, 3$ и 5 . Направление и величина стрелки соответствуют произведению af

возрастания величины a вертикальная компонента силы f_z уменьшается, а зависимость горизонтальной компоненты f_x от вертикальной координаты z становится все более слабой.

Горизонтальная протяженность очага цунами обычно в десятки раз превосходит глубину океана, следовательно, для дальнейших оценок целесообразно выбирать источник большой горизонтальной протяженности. Но в таком случае можно пренебречь как действием вертикальной компоненты силы, так и зависимостью ее горизонтальной компоненты от координаты z , что позволяет использовать линейную теорию длинных волн для описания гравитационной волны, возбуждаемой действием массовой силы.

Возбуждение длинной волны

Система уравнений линейной теории длинных волн с учетом действия внешней горизонтальной силы $f(x, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + f(x, t), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + H \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

традиционным способом сводится к неоднородному волновому уравнению, которое мы запишем в принятом нами безразмерном виде (см. формулы (10))

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{H}{g} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (13)$$

где ξ — смещение свободной поверхности жидкости от равновесного положения. Величины ξ и f в уравнении (13) являются размерными. Решение уравнения (13) хорошо известно [3] и может быть записано следующим образом:

$$\xi(x, t) = \frac{H}{2g} \int_0^t d\hat{t} \int_{x-(t-\hat{t})}^{x+(t-\hat{t})} \frac{\partial f}{\partial \hat{x}} d\hat{x}. \quad (14)$$

Будем считать, что колебания дна имеют фиксированную амплитуду и частоту в течение некоторого промежутка времени τ . В этом случае функция $f(x, t)$ может быть представлена в виде

$$f(x, t) = f(x) [\theta(t) - \theta(t - \tau)]. \quad (15)$$

Подставляя выражение (15) в формулу (14) и выполняя интегрирование по пространственной переменной, получаем

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= -\frac{H}{2g} \int_0^t [\theta(\hat{t}) - \theta(\hat{t} - \tau)] \times \\ &\times [f(x + (t - \hat{t})) - f(x - (t - \hat{t}))] d\hat{t}. \end{aligned} \quad (16)$$

Зависимость f_x от вертикальной координаты z является слабой. Для определенности в дальнейших расчетах будем полагать $f(x) = f_x(x, -0.5)$.

Результаты и их обсуждение

Процесс формирования длинной гравитационной волны, которая возникает при детектировании быстрых колебаний водного слоя, иллюстрируется на рис. 2. Смещения поверхности жидкости $\xi(x)$ рассчитаны по формуле (16) в последовательные моменты времени $t = 2, 4, 6, 8, 10$ и 12 при значениях параметров $a = 5$ и $\tau = 3$. Полностью сформировавшаяся волна состоит из горба и впадины, которые имеют одинаковые форму и высоту.

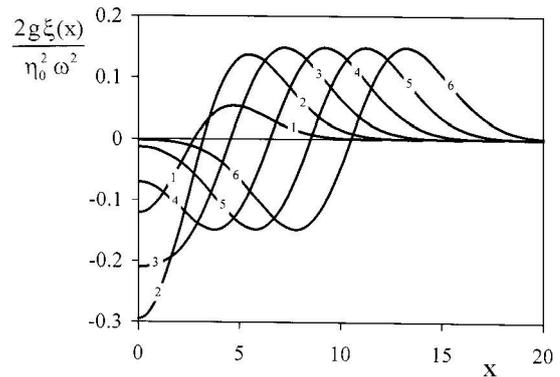


Рис. 2. Смещение поверхности, рассчитанное в последовательные моменты времени $t = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ (соответственно кривые 1–6) для пространственного распределения η_1 при $a = 5, \tau = 3$

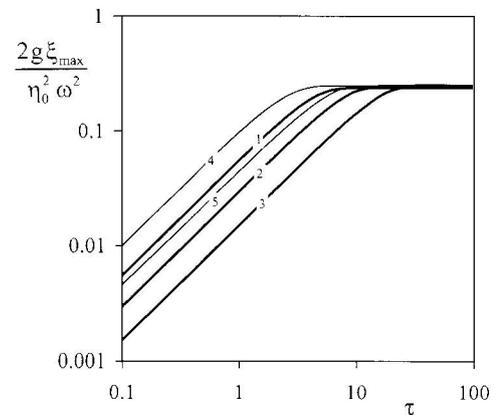


Рис. 3. Амплитуда длинной волны в зависимости от продолжительности действия источника. Кривые 1–3 рассчитаны для пространственного распределения η_1 при $a = 5, 10$ и 20 , кривые 4 и 5 — для η_2 при $b = 2, c = 3$ (4) и $b = 1, c = 9$ (5)

На рис. 3 представлена амплитуда волны ξ_{\max} (высота горба) как функция продолжительности колебаний дна при различных формах пространственного распределения амплитуды колебаний. Величина ξ_{\max} монотонно возрастает с увеличением продолжительности колебаний, но этот рост не беспредельный: амплитуда не может быть больше некоторой величины, которая практически не зависит от формы пространственного распределения $\eta_i(x)$. Горизонтальная протяженность колеблющейся области дна

заметно влияет на значение τ , при котором будет достигнута максимальная амплитуда: при большей протяженности для формирования волны с максимальной амплитудой требуется более продолжительное время действия источника.

Рассматриваемый нелинейный эффект можно кратко представить следующим образом. При колебаниях дна бассейна жидкость «выталкивается» из области наиболее интенсивных движений (из очага), что и служит причиной формирования гравитационной волны. Амплитуда такой волны не зависит от пространственного закона изменения амплитуды колебаний дна (при условии достаточной плавности этого закона), но определяется амплитудой скорости колебаний $\eta_0\omega$, их продолжительностью τ и горизонтальным размером колеблющейся области.

Данные, представленные на рис. 3, позволяют оценить амплитуду волны цунами, сформированной рассматриваемым нелинейным механизмом. Так, например, при глубине океана 1 км колебания участка дна с характерным размером 20 км (пространственное распределение η_1 , $a = 10$), амплитудой колебательной скорости 10 м/с, которые происходят в течение 60 с, образуют волну с амплитудой 0.8 м.

Отметим, что при частотах колебаний дна, превышающих величину $c_s H^{-1}$, где c_s — скорость звука в воде, заметную роль начинает играть сжимаемость воды. Это накладывает определенные ограничения на применение полученных выше результатов. Здесь будет уместно упомянуть одну из работ, авторы которой применяли аналогичный нашему подход для оценки возможности генерации цунами при детектировании в водном слое акустических возмущений [4]. В работе [4] рассматривается задача в более общей постановке, т. е. учитываются нелинейные эффекты, связанные со сжимаемостью воды. Но при этом для

определения параметров волны цунами используется некоторое гипотетическое звуковое поле, локализованное строго над источником и имеющее только горизонтальные фронты, т. е. излучение акустических волн из очага считается пренебрежимо малым и не учитывается достаточно сложная связь между движениями дна и поведением сжимаемой жидкости со свободной верхней границей. В нашей же работе устанавливается непосредственная связь между возбуждаемой длинной волной и параметрами, определяющими колебания дна.

В последующих исследованиях мы планируем учесть сжимаемость воды, при этом будут использованы необходимые линейные модели, описывающие поведение сжимаемой тяжелой жидкости на подвижном дне, которые нами уже рассматривались в работах [5–7].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 98-05-64522).

Литература

1. Носов М.А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1992. № 1. С. 109 (Moscow University Phys. Bull. 1992. No. 1. P. 110).
2. Носов М.А., Шелковников Н.К. // Изв. АН СССР, ФАО. 1992. 28, № 10–11. С. 1117.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
4. Новикова Л.Е., Островский Л.А. // Океанология. 1982. 22, № 5. С. 693.
5. Носов М.А., Саммер К. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 6. С. 55 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 6. P. 67).
6. Nosov M.A. // Phys. Chem. Earth (B). 1999. 24, No. 5. P. 437.
7. Носов М.А. // Изв. РАН, ФАО. 2000. 36, № 5. С. 718.

Поступила в редакцию
30.10.00

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.13

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗВЕЗДНОЙ СИСТЕМЫ AS ЖИРАФА

Е. А. Колосова

(ГАИШ)

E-mail: solov@sai.msu.ru

Исследована динамическая устойчивость затменной переменной звездной системы AS Жирафа в предположении, что двойная система имеет третий удаленный компонент. Исследование проводилось на основе аналитической теории для случая, когда два компонента образуют тесную пару, а третий находится на значительном расстоянии от них. При этом полагалось, что звезды взаимодействуют по закону всемирного тяготения Ньютона.

Введение

Звездная система AS Жирафа является тесной двойной системой (ТДС), блеск которой меняется с

периодом, равным периоду обращения по орбите, а размеры компонентов сравнимы с их взаимными расстояниями. Анализ кривой блеска и спектральных данных позволяет найти параметры рассматриваемой