

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.01

ДИСПЕРСИОННАЯ МОДЕЛЬ РАССЕЙНИЯ ПИОНА  
НА ФИКСИРОВАННОМ НУКЛОНЕ

Д. В. Мещеряков

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

E-mail: meshcher@recrep.phys.msu.su

Рассмотрена задача рассеяния псевдоскалярного мезона с орбитальным моментом, равным единице, на фиксированном нуклоне с орбитальным моментом, равным единице. Получено решение задачи, обладающее свойствами унитарности и кроссинг-симметрии.

Проблема адекватного описания рассеяния адронов в непертурбативной области КХД все еще не может быть отнесена к числу решенных и поэтому вызывает устойчивый интерес [1–7]. Один из возможных подходов к проблеме базируется на использовании аналитических свойств  $S$ -матрицы.

В настоящей работе в рамках этого подхода исследуется статический предел задачи рассеяния пиона на нуклоне, что физически соответствует бесконечно тяжелому нуклону. Аналитическая структура амплитуд рассеяния в калибровочных теориях с конфайнментом исследовалась в работе [1]. Было показано, что аналитические свойства амплитуд рассеяния, установленные в процессе доказательства дисперсионных соотношений, справедливы и в КХД. Хорошо известно [2], что статический предел дисперсионных соотношений эквивалентен системе нелинейных интегральных уравнений [4]. Эти уравнения, в свою очередь, сводятся к нелинейной граничной задаче [5], которая формулируется в виде следующих уравнений для  $S_i$  — матричных элементов  $S$ -матрицы:

- а)  $S_i(z)$  — мероморфная функция в плоскости комплексного переменного  $z$  с разрезами  $(-\infty, -1]$ ,  $[1, \infty)$ ,
- б)  $S_i^*(z) = S_i(z^*)$ ,
- в)  $|S_i(\omega + i0)|^2 = 1$  при  $\omega \geq 1$ ,  $S_i(\omega + i0) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} S_i(\omega + i\epsilon)$ ,
- г)  $S_i(-z) = \sum_{j=1}^N A_{ij} S_j(z)$ ,

где звездочкой обозначено комплексное сопряжение.

Действительные значения переменной  $z$  соответствуют полной энергии  $\omega$  релятивистской частицы, рассеивающейся на фиксированном центре. Отметим, что здесь и далее  $\omega$  измеряется в единицах массы пи-мезона. Требование мероморфности функций  $S_i(z)$  вытекает из рассмотрения статического предела задачи рассеяния [7]. Условие упругой унитарности (1в) выполняется лишь на правом разрезе в плоскости  $z$ . На левом разрезе функции  $S_i(z)$  определяются условиями кроссинг-симметрии (1г). Матрица кроссинг-симметрии  $A$  определяется группой инвариантности  $S$ -матрицы [5].

Перепишем условия (1а)–(1г) в матричной форме, для чего введем столбец  $S^{(0)}(z) = [S_1(z), S_2(z), \dots, S_N(z)]$ , где верхний индекс обозначает физический лист римановой поверхности  $S$ -матрицы. Условия (1а, б, г) относятся к физическому листу, в то время как условие унитарности (1в) может быть распространено на комплексные значения  $\omega$ , что в компонентной форме имеет вид  $S_i^{(0)}(z) S_i^{(1)}(z) = 1$ . Матричная форма условия унитарности (1в) получается путем применения операции инверсии  $I$  согласно формуле  $IS(z) = [1/S_1(z), 1/S_2(z), \dots, 1/S_N(z)]$ . В результате условия (1а)–(1г) принимают следующий вид:

- а)  $S^{(0)}(z)$  — столбец мероморфных функций в комплексной плоскости  $z$  с разрезами  $(-\infty, -1]$ ,  $[1, \infty)$ ,
- б)  $S^{(0)*}(z) = S^{(0)}(z^*)$ ,
- в)  $S^{(1)}(z) = IS^{(0)}(z)$ ,
- г)  $S^{(0)}(-z) = AS^{(0)}(z)$ .

Аналитическое продолжение на нефизические листы определим следующим образом [7]:

$$S^{(p)}(z) = (IA)^p S^{(0)}(z(-1)^p). \quad (3)$$

Используя определение (3), можно легко продолжить условия унитарности (2в) и кроссинг-симметрии (2г) на нефизические листы римановой поверхности:

$$IS^{(p)}(z) = S^{(1-p)}(z), AS^{(p)}(z) = S^{(-p)}(-z)$$

и в результате получить формулу

$$(IA)^q S^{(p)}(z) = S^{(q+p)}(z(-1)^q). \quad (4)$$

Рассеяние мезона с орбитальным моментом, равным единице, на фиксированном центре с орбитальным моментом, равным единице, описывается матри-

цей кроссинг-симметрии следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Разложим столбец  $S(z)$  по собственным векторам матрицы  $A$ :

$$S(z) = s_1(z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}s_2(z) \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\psi(z) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Функциональное уравнение (4) при  $q = 1$ ,  $p = 0$  в пределе  $z \rightarrow \infty$  определяет фиксированные точки (точки покоя) задачи. Возвращаясь от функций  $s_1(z)$ ,  $s_2(z)$ ,  $\psi(z)$  к  $S_i(z)$ , где  $i = 1, 2, 3$ , получаем

$$S = \pm i \begin{pmatrix} -(2 \pm \sqrt{5}) \\ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Из столбца (7) видно, что все точки покоя лежат в плоскости  $S_2 + S_3 = 0$ . Данная плоскость является инвариантом преобразований инверсии  $I$  и кроссинг-симметрии  $A$ . Трехрядная матрица кроссинг-симметрии (5) на плоскости  $S_2 + S_3 = 0$  переходит в двухрядную матрицу  $A_2$ :

$$A_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

и задача сводится к отысканию двух функций,  $S_1(z)$  и  $S_2(z)$ . Полагая  $z = 0$  и вводя  $X^{(k)} = S_1^{(k)}/S_2^{(k)}$ , где  $k$  — номер листа римановой поверхности, получаем, что переход от физического листа  $k = 0$  к листу с номером  $n$  есть дробно-линейное преобразование:

$$X^{(n)} = \frac{\sqrt{5}(X^{(0)} - 2)(y_-^n - y_+^n) + (X^{(0)} + 4)(y_-^n + y_+^n)}{(X^{(0)} + 4)(y_-^n - y_+^n) + \sqrt{5}(X^{(0)} - 2)(y_-^n + y_+^n)}, \quad (9)$$

где  $y_{\pm} = (3 \pm \sqrt{5})/2$ . Требования унитарности и кроссинг-симметрии  $X^{(n)}$  приводят к следующему условию для определения  $X^{(0)}$ :

$$(X^{(0)} - 2)(X^{(0)} + 4) = 0. \quad (10)$$

Следовательно, получаются два различных решения, совместимые с требованиями унитарности и кроссинг-симметрии:  $X^{(0)} = 2$  и  $X^{(0)} = -4$ .

Таким образом, на любом нефизическом листе римановой поверхности задачи (8) отношение  $S_1/S_2$  определено при  $z = 0$  и для построения  $S_1$  и  $S_2$  достаточно найти любую из этих функций. Введем обозначение  $S_2(n) = \Phi(n) = -s_2(n) + \psi(n)$ , где функции  $s_2$  и  $\psi$  были введены в (6). Эта функция удовлетворяет системе функциональных уравнений

$$\Phi(1-n)\Phi(n) = 1, \quad (11)$$

$$\frac{\Phi(n)}{\Phi(-n)} = (-1) \frac{\text{ch ln } y_+^{n+1/2}}{\text{ch ln } y_+^{n-1/2}} \quad (X^{(0)} = 2), \quad (12)$$

$$\frac{\Phi(n)}{\Phi(-n)} = (-1) \frac{\text{sh ln } y_+^{n+1/2}}{\text{sh ln } y_+^{n-1/2}} \quad (X^{(0)} = -4). \quad (13)$$

При получении двух последних уравнений было использовано соотношение (9). Уравнение (11) имеет решение

$$\Phi(n) = e^{g(n-1/2)}, \quad (14)$$

где  $g(n)$  — любая нечетная функция:  $g(n) = -g(-n)$ . Подставляя (14) в (12) и (13), после замены  $n \rightarrow n + 1/2$  получаем разностные уравнения для определения неизвестной функции  $g(n)$ :

$$g(n+1) + g(n) = \ln \left[ (-1) \frac{\text{ch ln } y_+^{n+1}}{\text{ch ln } y_+^n} \right] \quad (X^{(0)} = 2), \quad (15)$$

$$g(n+1) + g(n) = \ln \left[ (-1) \frac{\text{sh ln } y_+^{n+1}}{\text{sh ln } y_+^n} \right] \quad (X^{(0)} = -4). \quad (16)$$

Решая (15) и (16) методом последовательных функциональных замен, приходим к результату:

$$g(n) = g_{-1}(n) + g_{\infty}(n) + \sum_{m=0}^{\infty} G_m(n), \quad (17)$$

где  $g_{\infty}(n) = n \ln y_+$ , и

$$G_m(n) = \ln \frac{\text{ch ln } y_+^{(n+1+2m)} \text{ch ln } y_+^{(n-2(m+1))}}{\text{ch ln } y_+^{(n-1-2m)} \text{ch ln } y_+^{(n+2(m+1))}} \quad (X^{(0)} = 2), \quad (18)$$

$$G_m(n) = \ln \frac{\text{sh ln } y_+^{(n+1+2m)} \text{sh ln } y_+^{(n-2(m+1))}}{\text{sh ln } y_+^{(n-1-2m)} \text{sh ln } y_+^{(n+2(m+1))}} \quad (X^{(0)} = -4). \quad (19)$$

Слагаемое  $g_{-1}(n)$  учитывает множитель  $(-1)$  в уравнениях (15), (16). Введем обозначение  $e^{g_{-1}(n)} = \xi(n)$ . Тогда функция  $\xi(n)$  есть решение системы функциональных уравнений

$$\xi(n+1)\xi(n) = -1, \quad \xi(n)\xi(-n) = 1.$$

Общее решение этой системы выражается через  $\theta$ -функции. Здесь мы ограничимся вырожденным случаем

$$\xi(n) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (20)$$

Используем теперь условие унитарности (16). В результате  $n$  как функция комплексной переменной  $z$  является решением краевой задачи и имеет вид

$$n(z) = (1/\pi) \arcsin z + i\sqrt{z^2 - 1}\beta(z), \quad (21)$$

где  $\beta(z) = -\beta(-z)$  — произвольная мероморфная функция. Уравнение (21) показывает, что риманова поверхность рассматриваемой модели имеет алгебраические точки ветвления при  $z = \pm 1$  и логарифмическую точку ветвления на бесконечности. Теперь формулы (9), (10), (14)–(21) дают общее решение задачи (1) для матрицы кроссинг-симметрии (8).

Полученные решения могут быть использованы для проверки различных приближенных методов решения соответствующей динамической задачи.

### Литература

1. *Oehme R.* // Phys. Rev. 1990. **D42**. P. 4209; Phys. Lett. 1990. **B252**. P. 14; J. Mod. Phys. 1995. **A10**. P. 1995.
2. *Chew G., Goldberger M., Low F., Nambu L.* // Phys. Rev. 1957. **106**. P. 1337.
3. *Low F.* // Phys. Rev. 1955. **97**. P. 1932; *Chew G., Low F.* // Phys. Rev. 1956. **101**. P. 1570; *Oehme R.* // Phys. Rev. 1956. **102**. P. 1174.
4. *Meshcheryakov V.A.* // Сообщения ОИЯИ Р-2369. Дубна, 1965; *Zhuravlev V.I., Meshcheryakov V.A.* // Phys. Elem. Part. Atom. Nuclei. 1974. **5**. P. 173.
5. *Мещераков В.А.* // ЖЭТФ. 1968. **26**. С. 120.
6. *Meshcheryakov D.V., Tverskoy V.B.* // Acta Physica Slovaca. 1995. **45**. P. 591.
7. *Meshcheryakov V.A.* // Int. J. Mod. Phys. 1997. **A12**. P. 249.

Поступила в редакцию  
29.05.00

УДК 51:53

## ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ В РАМКАХ НОВОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ СО СХОДЯЩИМИСЯ РЯДАМИ

В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе, И. Л. Юдин

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

E-mail: belokur@rector.msu.ru

В рамках новой теории возмущений со сходящимися рядами проводится вычисление некоторых величин, заданных конечным числом членов разложения традиционной теории возмущений. Полученные результаты сравниваются с известными точными решениями.

### Введение

В настоящей работе предложенный нами [1] метод вычисления величин, заданных конечным числом членов разложения в ряд теории возмущений, применяется к некоторым задачам, в которых ряды теории возмущений факториально расходятся.

Основным средством получения количественной информации о величинах, которым сопоставлены ряды теории возмущений с факториальной расходимостью, являются метод Бореля и его модификации [2]. Этот подход содержит, однако, существенную неоднозначность, связанную с тем, что суммируется некоторый другой ряд, имеющий одинаковые с исследуемым рядом первые члены и асимптотическое поведение коэффициентов.

Напомним, что в рамках нашего метода значение суммы

$$f(g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-g)^n, \quad a_n \sim Cn! a^n n^b, \quad (1)$$

где  $C, a, b$  — некоторые положительные константы, может быть аппроксимировано с высокой точностью

значением конечной суммы  $f_N(g, R)$  абсолютно сходящегося ряда новой теории возмущений:

$$f_N(g, R) = \sum_{n=0}^{mN} \frac{(-1)^n}{(2n)!} g^n B_m^n A_{2n}(R), \quad (2)$$

где

$$A_{2n}(R) = \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \tilde{\varphi}(\rho) \rho^{2n} d\rho,$$

$$\tilde{\varphi}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho r} \exp\{-r^{2m}\} dr$$

( $m$  — натуральное число,  $R$  — параметр регуляризации,  $N$  — число известных членов ряда (1),  $B_{k/m} = a_n$ ,  $n = k/m$  при  $k = 0 \pmod m$ ) при произвольных значениях параметра разложения  $g$  [3]. В случае больших  $g$  вместо (2) удобнее пользоваться разложением по обратным степеням  $g$  [1].