

Общее решение этой системы выражается через θ -функции. Здесь мы ограничимся вырожденным случаем

$$\xi(n) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (20)$$

Используем теперь условие унитарности (16). В результате n как функция комплексной переменной z является решением краевой задачи и имеет вид

$$n(z) = (1/\pi) \arcsin z + i\sqrt{z^2 - 1}\beta(z), \quad (21)$$

где $\beta(z) = -\beta(-z)$ — произвольная мероморфная функция. Уравнение (21) показывает, что риманова поверхность рассматриваемой модели имеет алгебраические точки ветвления при $z = \pm 1$ и логарифмическую точку ветвления на бесконечности. Теперь формулы (9), (10), (14)–(21) дают общее решение задачи (1) для матрицы кроссинг-симметрии (8).

Полученные решения могут быть использованы для проверки различных приближенных методов решения соответствующей динамической задачи.

Литература

1. *Oehme R.* // Phys. Rev. 1990. **D42**. P. 4209; Phys. Lett. 1990. **B252**. P. 14; J. Mod. Phys. 1995. **A10**. P. 1995.
2. *Chew G., Goldberger M., Low F., Nambu L.* // Phys. Rev. 1957. **106**. P. 1337.
3. *Low F.* // Phys. Rev. 1955. **97**. P. 1932; *Chew G., Low F.* // Phys. Rev. 1956. **101**. P. 1570; *Oehme R.* // Phys. Rev. 1956. **102**. P. 1174.
4. *Meshcheryakov V.A.* // Сообщения ОИЯИ Р-2369. Дубна, 1965; *Zhuravlev V.I., Meshcheryakov V.A.* // Phys. Elem. Part. Atom. Nuclei. 1974. **5**. P. 173.
5. *Мещераков В.А.* // ЖЭТФ. 1968. **26**. С. 120.
6. *Meshcheryakov D.V., Tverskoy V.B.* // Acta Physica Slovaca. 1995. **45**. P. 591.
7. *Meshcheryakov V.A.* // Int. J. Mod. Phys. 1997. **A12**. P. 249.

Поступила в редакцию
29.05.00

УДК 51:53

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ В РАМКАХ НОВОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ СО СХОДЯЩИМИСЯ РЯДАМИ

В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе, И. Л. Юдин

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

E-mail: belokur@rector.msu.ru

В рамках новой теории возмущений со сходящимися рядами проводится вычисление некоторых величин, заданных конечным числом членов разложения традиционной теории возмущений. Полученные результаты сравниваются с известными точными решениями.

Введение

В настоящей работе предложенный нами [1] метод вычисления величин, заданных конечным числом членов разложения в ряд теории возмущений, применяется к некоторым задачам, в которых ряды теории возмущений факториально расходятся.

Основным средством получения количественной информации о величинах, которым сопоставлены ряды теории возмущений с факториальной расходимостью, являются метод Бореля и его модификации [2]. Этот подход содержит, однако, существенную неоднозначность, связанную с тем, что суммируется некоторый другой ряд, имеющий одинаковые с исследуемым рядом первые члены и асимптотическое поведение коэффициентов.

Напомним, что в рамках нашего метода значение суммы

$$f(g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-g)^n, \quad a_n \sim Cn! a^n n^b, \quad (1)$$

где C, a, b — некоторые положительные константы, может быть аппроксимировано с высокой точностью

значением конечной суммы $f_N(g, R)$ абсолютно сходящегося ряда новой теории возмущений:

$$f_N(g, R) = \sum_{n=0}^{mN} \frac{(-1)^n}{(2n)!} g^n B_m^n A_{2n}(R), \quad (2)$$

где

$$A_{2n}(R) = \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \tilde{\varphi}(\rho) \rho^{2n} d\rho,$$

$$\tilde{\varphi}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho r} \exp\{-r^{2m}\} dr$$

(m — натуральное число, R — параметр регуляризации, N — число известных членов ряда (1), $B_{k/m} = a_n$, $n = k/m$ при $k = 0 \pmod m$) при произвольных значениях параметра разложения g [3]. В случае больших g вместо (2) удобнее пользоваться разложением по обратным степеням g [1].

Везде ниже будем полагать $m = 4$, что соответствует использованию трех коэффициентов $B_{k/4}$ с нецелым $k/4$ для каждого интервала $(k, k + 1)$ и, по-видимому, оптимально (см. [3]).

Хотя в рассматриваемых в настоящей работе задачах известны все коэффициенты ряда традиционной теории возмущений (или достаточно большое их число), мы ограничиваемся случаем $N = 5$. Такой выбор обусловлен тем, что в ряде физически интересных задач, где точные решения отсутствуют (вычисление ренормгрупповых функций, критических индексов), известно, как правило, 5–7 членов ряда традиционной теории возмущений. Таким образом, мы проводим исследование возможности применения нашего метода к решению указанных задач.

Способы определения параметра регуляризации R и коэффициентов B_α , которые заданы при $\alpha = n$, $n = 0, 1, 2 \dots$, для нецелых $\alpha = 1/4, 2/4, 3/4 \dots$, подробно обсуждались в работах [1, 3].

Будем предполагать, что критерии применимости [1, 3] предложенного нами метода выполнены. Покажем, что с помощью используемого метода возможно получить значения исследуемых величин с высокой точностью.

1. Ангармонический осциллятор

Энергия основного состояния ангармонического осциллятора с гамильтонианом $H = p^2 + x^2 + gx^4$ представима в виде расходящегося ряда

$$E_0(g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-g)^n.$$

Коэффициенты a_k были посчитаны в работе [6] вплоть до $k = 75$. Ограничимся первыми пятью:

$$E_0(g) \approx \frac{1}{2} + \frac{3}{4}g - \frac{21}{8}g^2 + \frac{333}{15}g^3 - \frac{30885}{128}g^4 + \frac{916731}{258}g^5.$$

В области больших значений параметра g имеется численное решение уравнения Шрёдингера [5]

$$E_0^{\text{exact}}(g) = g^{1/3}(0.667986259 + 0.14367g^{-2/3} - 0.0088g^{-4/3} + \dots). \tag{3}$$

Как и в предыдущей работе [1], выберем в качестве функции $f(g)$, к которой применим наш метод, функцию

$$f(g) = \exp\{-E_0(g)g\}.$$

Здесь и ниже коэффициенты B_α с целыми α для функции $f(g)$ считаются пропорциональными коэффициентам ее разложения в ряд Тейлора в точке $g = 0$, $B_\alpha = |f^{(\alpha)}(0)|$. Для нецелых α коэффициенты B_α приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

α	B_α	α	B_α	α	B_α
1/4	0.8409	7/4	1.2790	14/4	82.62
2/4	0.7071	9/4	2.9100	15/4	33.24
3/4	0.5946	10/4	4.8380	17/4	205.30
5/4	0.6839	11/4	8.0440	18/4	510.40
6/4	0.9354	13/4	33.2400	19/4	1387.40

На рис. 1 кривая I отвечает решению, построенному нашим методом, кривая II — численному решению (3).

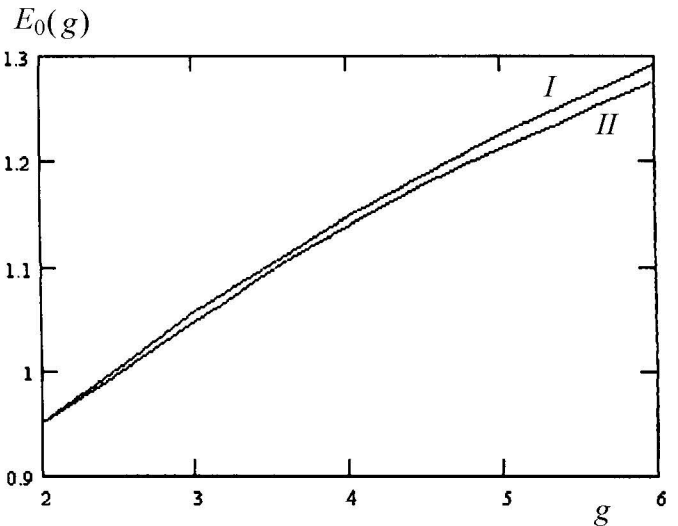


Рис. 1

2. Уровни энергии электрона при $Z > 137$

В пределе малого радиуса ядра ($|\ln R| \geq 1$) для энергии уровня ϵ вблизи границы нижнего континуума справедливо соотношение [6]

$$\phi(x) = (\zeta^2 - 1)^{-1/2} - (\zeta_{cr}^2 - 1)^{-1/2},$$

где $x = \epsilon^2 - 1$, $\zeta = Ze^2 \approx Z/137$, $\zeta_{cr} = Z_{cr}e^2$, Z — заряд ядра, e — заряд электрона. Для основного уровня $1s_{1/2}$

$$\phi(x) = -\frac{1}{\pi} \left\{ \psi(x^{-1/2}) + \frac{1}{2} \left[\ln \frac{x}{1+x} + 1 + x^{1/2} - (1+x)^{1/2} \right] \right\}, \tag{4}$$

где $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$. Отсюда для $\phi(x)$ можно получить следующий расходящийся ряд:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-x)^k,$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi k} \left[(-1)^k B_{2k} + \frac{\Gamma(k-1/2)}{\Gamma(k)\Gamma(-1/2)} - 1 \right],$$

где B_{2k} — числа Бернулли. Вычисленные в нашем подходе коэффициенты для функции $f(x) = \exp\{-\phi(x)\}$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

α	B_α	α	B_α	α	B_α
1/4	0.7436	7/4	0.2725	14/4	1.022
2/4	0.5432	9/4	0.3346	15/4	1.346
3/4	0.3867	10/4	0.4024	17/4	2.510
5/4	0.2675	11/4	0.4795	18/4	3.577
6/4	0.2700	13/4	0.7672	19/4	5.123

Кривая I на рис. 2 отвечает решению, полученному нашим методом, кривая II — точному решению (4).

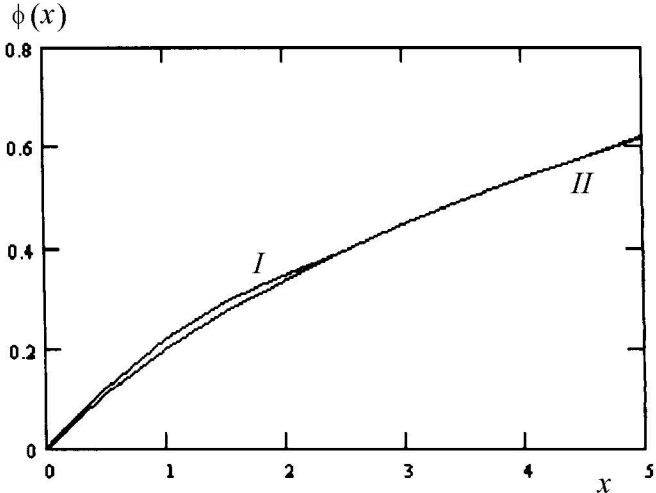


Рис. 2

3. Лагранжиан Гейзенберга–Эйлера

Как известно, взаимодействие электромагнитного поля с вакуумом заряженных частиц спина s и массы m приводит к нелинейной поправке L' к максвелловскому лагранжиану $L_0 = (E^2 - H^2)/2$. В случае постоянных и однородных полей \mathbf{E} и \mathbf{H} для L' известны точные одно- и двухпетлевые [7, 8] выражения. Для иллюстрации применимости нашего метода ограничимся рассмотрением однопетлевого вклада. В простейшем случае $\mathbf{E}\mathbf{H} = 0$ и L' зависит лишь от инварианта $x = e^2(H^2 - E^2)/m_e^4$, где m_e — масса электрона:

$$L'(x) = \frac{(2s+1)m_e^4}{4\pi} \phi_s(x),$$

$$\phi_s(x) = \int_0^\infty d\tau \frac{e^{-\tau}}{\tau^3} \chi_s(\tau x^{1/2}), \tag{5}$$

$$\chi_s(x) = \begin{cases} x/\text{sh } x - 1 + \frac{1}{6}x^2, & s = 0 \\ 1 + \frac{1}{3}x^2 - x \text{cth } x, & s = \frac{1}{2} \end{cases}$$

При $x \rightarrow 0$

$$\chi_s(x) = \sum_{k=2}^\infty c_k^{(s)} x^{2k},$$

$$c_k^{(0)} = \frac{2(1 - 2^{2k-1})}{(2k)!} b_{2k}, \quad c_k^{1/2} = -\frac{2^{2k}}{(2k)!} B_{2k},$$

где B_{2k} — числа Бернулли. Подставляя эти разложения в (5) и интегрируя, получаем для $\phi_s(x)$ ряд теории возмущений:

$$\phi_s(x) = \sum_{k=2}^\infty (-1)^k (2k-3)! c_k^{(s)} (-x)^k.$$

Применим наш метод суммирования к функции $f_s(x) = \exp\{-\phi_s(x)/x\}$. Вычисленные коэффициенты B_α приведены в табл. 3.

Таблица 3

α	B_α		α	B_α		α	B_α	
	$s = 0$	$s = 1/2$		$s = 0$	$s = 1/2$		$s = 0$	$s = 1/2$
1/4	0.37	0.39	7/4	0.02	0.02	14/4	0.63	0.63
2/4	0.14	0.15	9/4	0.04	0.04	15/4	1.28	1.28
3/4	0.05	0.06	10/4	0.06	0.06	17/4	6.37	6.39
5/4	0.02	0.02	11/4	0.10	0.10	18/4	15.66	15.68
6/4	0.02	0.02	13/4	0.31	0.31	19/4	38.46	38.51

Случай $s = 0$ иллюстрируется на рис. 3: кривая I соответствует решению, полученному в рамках нашего подхода, кривая II — точному решению (5). Случай $s = 1/2$ аналогичен.

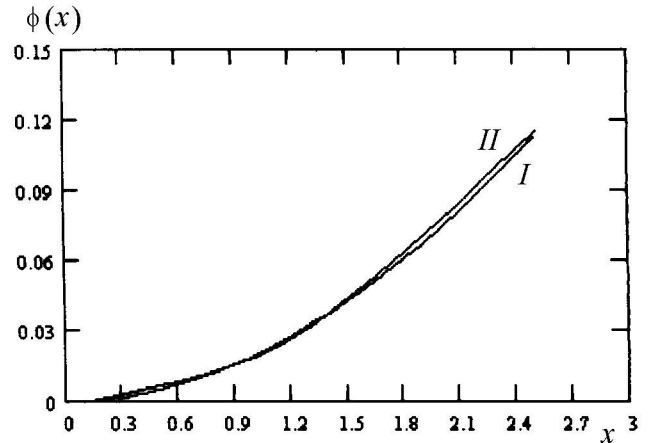


Рис. 3

4. Релятивистское уравнение Томаса–Ферми

Самосогласованный потенциал $V(r)$ в вакуумной оболочке сверхкритического атома подчиняется уравнению [9]

$$\Delta V = 4\pi e^2 \left[n_p(r) - \frac{1}{3\pi^2} (V^2 + 2V)^{3/2} \right],$$

где Δ — оператор Лапласа, $n_p(r)$ — плотность протонов в ядре ($\hbar = c = m_e = 1$). Положим

$$V(r) = -\frac{Z_1 e^2}{r} \left[\frac{\zeta(r, \mu)}{\mu} \right]^{1/2}, \quad \mu = \frac{(Z_1 e^3)^2}{3\pi},$$

где $Z_1 = Z - N$ — заряд атома для внешнего наблюдателя, и пусть $\mu \leq 1$. Решения уравнения

в области $r \leq 1$ обладают свойством перенормируемости, причем $\zeta(r, \mu)$ играет роль инвариантного заряда, так что можно ввести β -функцию $\beta(\mu) = -\partial\zeta(r, \mu)/\partial \ln r|_{r=r_0}$. Для $\beta(\mu)$ можно получить дифференциальное уравнение, которое с помощью подстановки $\mu = g^2/4$, $\varphi(g) = 2g^{-1}\beta(g^2/4)$ приводится к виду

$$\frac{d\varphi(g)}{dg} = -1 + \frac{g^3}{\varphi} \quad (6)$$

с граничным условием $\varphi(g) = g^3 + O(g^5)$. Функция $\beta(\mu)$ при $g \rightarrow \infty$ может быть представлена в виде пертурбативного ряда:

$$\beta(\mu) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k (-\mu)^k, \quad b_k = 2^{2k-1} a_k.$$

Коэффициенты a_k , вычисленные с использованием рекуррентных соотношений, вытекающих из уравнения (6), приведены в табл. 4.

Таблица 4

k	a_k	k	a_k
0	1	4	4284
1	3	5	75978
2	24	6	1530720
3	285	7	34237485

Аналогично предыдущим примерам будем рассматривать функцию $f(\mu) = \exp\{-\beta(\mu)/\mu\}$. Коэффициенты B_α для нее приведены в табл. 5.

Таблица 5

α	B_α	α	B_α	α	B_α
1/4	3.7	7/4	$1.862 \cdot 10^4$	14/4	$1.694 \cdot 10^7$
2/4	13.9	9/4	$5.074 \cdot 10^4$	15/4	$8.416 \cdot 10^7$
3/4	51.6	10/4	$8.375 \cdot 10^4$	17/4	$1.321 \cdot 10^9$
5/4	602.6	11/4	$1.382 \cdot 10^5$	18/4	$5.236 \cdot 10^9$
6/4	1891	13/4	$3.411 \cdot 10^6$	19/4	$2.075 \cdot 10^{10}$

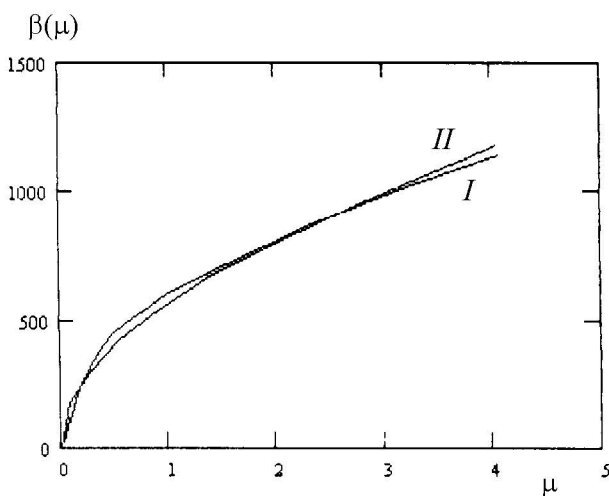


Рис. 4

На рис. 4 кривая I — решение, полученное используемым в настоящей работе методом, кривая II — численное решение уравнения (6).

5. Вычисление β -функции в теории $g\varphi^4/4!$ в двумерном пространстве-времени

Рассмотрим модель квантовой теории поля с взаимодействием $g\varphi^n/n!$. В этой модели β -функцию можно записать в виде разложения по степеням константы связи g :

$$\beta(g) = \sum_{k=2}^{\infty} C_k(n) (-g)^k. \quad (7)$$

В двумерном пространстве-времени для коэффициентов $C_k(n)$ при больших n может быть получено следующее асимптотическое выражение [10]:

$$C_k(n) = \frac{\sqrt{2\pi^k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-1)} \times \left(\frac{e}{8\pi} k^{(k+1)/(k-1)}\right)^{n(k-1)/2} \left(2\pi n \frac{k-1}{k}\right)^{-k/2} \times \exp\{(1+k)(1+\ln \pi + \gamma)\} \left[\frac{\Gamma(1/k)}{\Gamma(1-1/k)}\right]^k + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где γ — постоянная Эйлера, e — основание натурального логарифма. Просуммировать ряд (7) можно, заменив его на интеграл Зоммерфельда-Ватсона [10],

$$\beta(g) = \frac{i}{2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{dk}{\sin \pi k} g^k C_k(n), \quad 1 < \sigma < 2. \quad (8)$$

Для вычисления нашим методом определим коэффициенты B_α ряда (2), непосредственно продолжив $C_\alpha(n)$ по непрерывности на нецелые α .

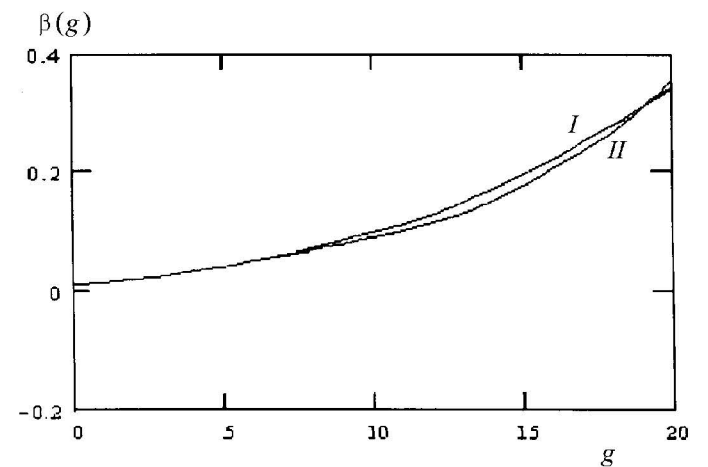


Рис. 5

На рис. 5 изображена β -функция для наиболее физически интересного случая $n = 4$: результат сум-

мирования ряда (7) нашим методом — кривая I и точное решение (8) — кривая II.

Итак, во всех разобранных задачах имеет место согласие между решениями, полученными в рамках нашего метода, и точными решениями.

Литература

1. Белокуров В.В., Соловьев Ю.П., Шавгулидзе Е.Т., Юдин И.Л. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 1. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No 1. P. 1).
2. Попов В.С., Елецкий В.Л., Турбинер А.В. // ЖЭТФ. 1978. 74. С. 445; Ядерная физика. 1978. 28, №4(10). С. 1109.
3. Белокуров В.В., Соловьев Ю.П., Шавгулидзе Е.Т. // Фундамент. и прикл. матем. 1999. 5, № 2. С. 363; ТМФ. 2000. 123, № 3. С. 452.

4. Bender C.M., Wu T.T. // Phys. Rev. 1969. 184. P. 1231.
5. Hioe F.T., MacMillen D., Montroll E.V. // Phys. Reports. 1978. C43. P. 306.
6. Попов В.С. // Ядерная физика. 1970. 12. С. 429; ЖЭТФ. 1971. 60. С. 1228.
7. Schwinger J. // Phys. Rev. 1951. 82. P. 664.
8. Рутыс В.И. // Тр. ФИАН. 1986. 168. С. 5.
9. Мигдал А.Б., Попов В.С., Воскресенский Д.Н. // Письма в ЖЭТФ. 1976. 24. С. 186.
10. Лунатов Л.Н. // Письма в ЖЭТФ. 1976. 24. С. 179; ЖЭТФ. 1976. 71. С. 2010.

Поступила в редакцию
14.06.00

УДК 533, 536, 538.9

АНАЛИЗ АДДИТИВНОСТИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ И ТВЕРДОСФЕРНОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ В УРАВНЕНИИ СОСТОЯНИЯ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ ТВЕРДЫХ СФЕР

Н. В. Бриллиантов, В. В. Малинин

(кафедра полимеров и кристаллов)

E-mail: malinine@polly.phys.msu.su

Показано, что представление свободной энергии однокомпонентной плазмы твердых сфер в виде суммы свободной энергии системы твердых сфер и энергии однокомпонентной плазмы справедливо в случае малых значений коэффициента упаковки или при достаточно больших значениях плазменного параметра Γ .

Введение

Модель однокомпонентной плазмы (ОКП) является одной из базовых моделей, применяемых, например, в астрофизике, теории металлов, физической химии [1–4]. Эта модель определяется как система одинаково заряженных точечных частиц, взаимодействующих посредством кулоновского потенциала и помещенных в однородный бесструктурный компенсирующий фон, заряженный противоположно и обеспечивающий электронейтральность системы [1, 2]. В целях более адекватного описания многих реальных систем необходимо учитывать конечные размеры частиц. Модель однокомпонентной плазмы с твердыми сферами (ОКПТС) относится к классу так называемых примитивных моделей, широко используемых в теоретических исследованиях расплавов солей [5], растворов электролитов [6], жидких металлов [7, 8] и суспензий заряженных коллоидных частиц [9, 10].

Модель ОКПТС изучалась в численных экспериментах методом Монте-Карло [11, 12], а также путем численного решения интегральных уравнений (гиперцепного и Перкуса–Йевики) [13], в рамках средне-сферического приближения и с помощью кластерного разложения [14, 15]. Однако применение этих ме-

тодов в теоретических исследованиях затруднительно в связи с их трудоемкостью, поэтому часто используется представление термодинамических потенциалов ОКПТС в виде суммы потенциалов системы твердых сфер и однокомпонентной плазмы (см., напр., [12, 16]).

Исследование обоснованности представления свободной энергии ОКПТС в виде суммы свободной энергии системы твердых сфер и свободной энергии ОКП путем сравнения уравнения состояния ОКП [17] и уравнения состояния ОКПТС, полученного в настоящей работе, показало, что такое представление справедливо при достаточно больших значениях плазменного параметра $\Gamma = l_B/a_c$, где $l_B = e^2/(k_B T)$ — длина Беррума (e — заряд частицы, k_B — константа Больцмана, T — температура), $a_c = (3/(4\pi\rho))^{1/3}$ — радиус ионной сферы и $\rho = N/\Omega$ — плотность частиц (N — число частиц, Ω — объем системы), либо при малых значениях коэффициента упаковки $\eta = (\pi/6)\rho d^3$ (d — диаметр твердых сфер). Степень неаддитивности (относительная ошибка такого представления) не превышает 10% в случае $\Gamma > 20$ либо $\eta < 0.02$, но может достигать 40% и более при $\Gamma < 4$ и при $\eta > 0.1$.