Авторы благодарны В.Р. Халилову за ценные замечания и И.Г. Попковой за помощь в работе.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 99-02-17936).

Литература

1. *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981.
2. *Тернов И.М., Халилов В.Р., Родионов В.Н.* Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
3. *Делоне Н.Б., Крайнов В.П.* // УФН. 1998. **168**, № 5. С. 531.
4. *Родионов В.Н.* // ЖЭТФ. 1998. **113** С. 21.
5. *Родионов В.Н.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 2. С. 5 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 2. P. 5).
6. *Ансельм А.И.* Введение в теорию полупроводников. М.: Наука, 1978.
7. *Родионов В.Н.* // ЖЭТФ. 1997. **111**. С. 3.
8. *Ритус В.И.* // Тр. ФИАН. Т. 111. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
08.12.00

УДК 519.6:517.584

ВЫЧИСЛЕНИЕ НУЛЕЙ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

В. П. Моденов

(*кафедра математики*)

Дан рекуррентный способ нахождения нулей сферических функций Бесселя и их производных путем редукции к задаче Коши для дифференциального уравнения с производной по параметру и алгебраической правой частью.

Введение

Сферические функции Бесселя [1, 2] играют важную роль в математической физике. Поэтому проблема эффективного нахождения их нулей и нулей их производных остается всегда актуальной.

Значения нулей сферических функций Бесселя и их производных используются при решении самых разных научных и практических задач. Например, нули сферической функции Бесселя первого рода и ее производной определяют собственные значения соответственно первой и второй краевых задач для шара [3], нули этой функции характеризуют частоты собственных колебаний сферического акустического резонатора [4] и сферического электромагнитного резонатора с идеально проводящей поверхностью [5].

В настоящей работе предлагается эффективный алгоритм вычисления нулей сферических функций Бесселя и их производных, основанный на рекуррентных соотношениях [6] для этих функций и применении дифференциально-параметрического метода [7].

1. Дифференциально-полиномиальное свойство

Как известно [6], сферические функции Бесселя

$$w = w_i(z) \quad (i \text{ — целое})$$

являются решениями дифференциального уравнения гипергеометрического типа

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{dw}{dz} + \left[1 - \frac{i\,(i+1)}{z^2}\right] w = 0$$

и удовлетворяют рекуррентным соотношениям, связывающим эти функции различных индексов с их производными:

$$w_{i+1}(z) = \frac{2i+1}{z} w_i(z) - w_{i-1}(z) = \qquad (1)$$

$$= -z^i \frac{d}{dz}\left[z^{-i} w_i(z)\right]. \qquad (2)$$

Рассмотрим функцию, равную отношению сферических функций Бесселя соседних порядков,

$$M_i(z) = \frac{w_i(z)}{w_{i-1}(z)}. \qquad (3)$$

Для этой функции выполняется дифференциально-полиномиальное свойство (ДП-свойство [7]), т. е. производная функции выражается в виде полинома от самой функции.

В самом деле,

$$M_i'(z) = \frac{w_i'(z)\,w_{i-1}(z) - w_i(z)\,w_{i-1}'(z)}{w_{i-1}^2(z)}. \qquad (4)$$

Используя рекуррентные формулы (1) и (2), выразим производные через функции

$$w_i'(z) = w_{i-1}(z) - \frac{i+1}{z} w_i(z), \qquad (5)$$

$$w'_{i-1}(z) = \frac{i-1}{z} w_{i-1}(z) - w_i(z). \qquad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (4) и воспользовавшись представлением (3), получим ДП-свойство функции (3) в виде

$$M'_i(z) = M_i^2(z) - \frac{2i}{z} M_i(z) + 1. \qquad (7)$$

2. Алгоритм вычисления нулей сферических функций Бесселя

Вычислим нули функции $w_{i+1}(z)$, считая нули функции $w_i(z)$ известными.

Пусть x — искомый нуль функции $w_{i+1}(z)$. Тогда из рекуррентного соотношения (1) получим

$$\frac{2i+1}{x} w_i(x) - w_{i-1}(x) = 0. \qquad (8)$$

Воспользовавшись обозначением (3), уравнение (8) запишем в виде

$$M_i(x) = \frac{x}{2i+1}. \qquad (9)$$

Введем параметр $t \in [0;1]$ и рассмотрим уравнение

$$M_i(z) = t\frac{z}{2i+1}. \qquad (10)$$

При $t=1$ это уравнение совпадает с (9). Следовательно, считая z функцией параметра t, неявно заданной уравнением (10), получим, что искомый корень x уравнения (9), а значит, и (8) равен значению функции $z(t)$ при $t=1$. При $t=0$ корни уравнения (10) или, что то же самое, нули функции $w_i(z)$, как предполагалось, нам известны.

Применяя теорему о производной неявно заданной функции и воспользовавшись ДП-свойством (7), для нахождения $x = z(1)$ получим задачу Коши для дифференциального уравнения с производной по параметру и алгебраической правой частью [7]:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{(2i+1)z}{z^2t^2 + (2i+1)^2(1-t)} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), & (11) \\ z(0) = x_i, & (12) \end{cases}$$

где x_i — нуль функции $w_i(z)$ $(i=0,1,2,\ldots)$.

Таким образом, задача Коши (11), (12) выражает рекуррентно нули функции w_{i+1} через нули функции w_i.

3. Вычисление нулей сферических функций Бесселя первого и второго рода

Применим алгоритм для вычисления нулей сферических функций Бесселя первого рода:

$$w_i(z) = j_i(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{i+1/2}(z),$$

где $J_{i+1/2}(z)$ — функция Бесселя полуцелого порядка.

Поскольку

$$w_0(z) = j_0(z) = \frac{\sin z}{z},$$

то ее нули известны и равны

$$x_0 = x_{0,p} = p\pi \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Подставляя их в начальное условие (12) и решая задачу Коши (11), (12), найдем нули $x_1 = x_{1,p}$ функции $j_1(z)$.

Подставляя $x_1 = x_{1,p}$ в (12), находим нули $x_2 = x_{2,p}$ функции $j_2(z)$ и т. д.

В табл. 1 приведены посчитанные с точностью 10^{-4} по данному алгоритму несколько нулей функции $j_i(z)$.

Аналогично вычисляются нули сферической функции Бесселя второго рода:

$$w_i(z) = n_i(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{i+1/2}(z),$$

где $N_{i+1/2}(z)$ — функция Неймана полуцелого порядка.

Поскольку

$$w_0(z) = n_0(z) = -\frac{\cos z}{z},$$

то нули функции $w_0(z) = n_0(z)$ известны и равны

$$x_0 = x_{0,p} = p\pi - \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя их в начальное условие (12) и решая задачу Коши (11), (12), найдем нули $x_1 = x_{1,p}$ функции $n_1(z)$.

Подставляя $x_1 = x_{1,p}$ в (12), находим нули $x_2 = x_{2,p}$ функции $n_2(z)$ и т. д.

В табл. 2 приведены посчитанные с точностью 10^{-4} по данному алгоритму несколько нулей функции $n_i(z)$.

Таблица 1

Нули функции $j_i(z)$

i	$p=1$	$p=2$	$p=3$
1	4.4934	7.7252	10.9041
2	5.7634	9.0950	12.3229

Таблица 2

Нули функции $n_i(z)$

i	$p=1$	$p=2$	$p=3$
1	2.7983	6.1212	9.3178
2	3.9595	7.4516	10.7156

4. Вычисление нулей производных сферических функций Бесселя

Аналогично предыдущему вычислим нули производной $w_i'(z)$, считая нули функции $w_i(z)$ известными.

Пусть x — искомый нуль производной $w_i'(z)$. Тогда из рекуррентного соотношения (5) имеем:

$$w_i'(x) = w_{i-1}(x) - \frac{i+1}{x} w_i(x) = 0.$$

В силу обозначения (3) для нахождения нуля производной $w_i'(z)$ получим уравнение

$$M_i(z) = \frac{z}{i+1}. \tag{13}$$

Введем параметр $t \in [0;1]$ и рассмотрим уравнение, совпадающее при значении параметра $t=1$ с уравнением (13),

$$M_i(z) = t\frac{z}{i+1}. \tag{14}$$

Решение уравнения (14) при $t=1$ даст решение уравнения (13), совпадающее с искомым нулем производной $w_i'(z)$. По теореме о производной неявно заданной функции $z=z(t)$, используя ДП-свойство функции $M_i(z)$ (7), этот нуль $x=z(1)$ находим при решении задачи Коши для дифференциального уравнения с производной по параметру и алгебраической правой частью [7]:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{(i+1)z}{z^2t^2 - (2i+1)(i+1)t + (i+1)^2} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \\ z(0) = x_i, \end{cases}$$

где x_i — нуль функции $w_i(z)$, который считаем известным.

Литература

1. *Ватсон Д.Н.* Теория бесселевых функций. М., 1949.
2. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., 1952.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1953.
4. *Рэлей Дж.* Теория звука. М., 1955.
5. *Бройль Л. де.* Электромагнитные волны в волноводах и резонаторах. М., 1948.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1974.
7. *Моденов В.П.* // ДАН СССР. 1987. **296**. № 3. С. 536.

Поступила в редакцию
18.12.00

УДК 539.12.01

МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ НЕТРИВИАЛЬНОЙ СПИРАЛЬНОСТИ И ФЕРМИОННЫЕ НУЛЕВЫЕ МОДЫ

В. Ч. Жуковский, И. В. Мамсуров

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: th180@phys.msu.su

Рассмотрено понятие спиральности магнитного поля и ее связь с топологическим зарядом Черна–Саймонса исходной неабелевой чисто калибровочной конфигурации полей. Получены решения уравнения Дирака, соответствующие нулевым модам, и исследованы их свойства.

Введение

В последнее время большое внимание уделяется исследованию топологических свойств решений уравнений поля для калибровочных бозонов и фермионов в различных конфигурациях внешних фоновых полей. Этот интерес связан с возможностью непрерывного отображения пространств разной или одинаковой размерности друг на друга. При этом понятие топологического заряда играет важную роль (см., напр., [1]).

Так, в случае 4-мерного евклидова пространства топологический заряд характеризует свойства отображения трехмерной сферы в этом пространстве на групповое пространство калибровочной группы $SU(2)$ при условии, что расстояние в евклидовом пространстве $\sqrt{x_E^2} \to \infty$. Это условие вытекает из требования конечности 4-мерного интеграла, определяющего действие калибровочного поля, что равносильно, в свою очередь, требованию, чтобы потенциал на бесконечности представлял собой чистую калибровку.

С другой стороны, оказалось, что и абелевы конфигурации калибровочных полей могут иметь нетривиальные топологические характеристики. Так, в работе [2] было получено абелево магнитное поле с нетривиальной спиральностью из неабелева вакуумного поля группы $SU(2)$.