4. Вычисление нулей производных сферических функций Бесселя

Аналогично предыдущему вычислим нули производной $w_i'(z)$, считая нули функции $w_i(z)$ известными.

Пусть x — искомый нуль производной $w_i'(z)$. Тогда из рекуррентного соотношения (5) имеем:

$$w_i'(x) = w_{i-1}(x) - \frac{i+1}{x} w_i(x) = 0.$$

В силу обозначения (3) для нахождения нуля производной $w_i'(z)$ получим уравнение

$$M_i(z) = \frac{z}{i+1}. \tag{13}$$

Введем параметр $t \in [0;1]$ и рассмотрим уравнение, совпадающее при значении параметра $t=1$ с уравнением (13),

$$M_i(z) = t\frac{z}{i+1}. \tag{14}$$

Решение уравнения (14) при $t=1$ даст решение уравнения (13), совпадающее с искомым нулем производной $w_i'(z)$. По теореме о производной неявно заданной функции $z=z(t)$, используя ДП-свойство функции $M_i(z)$ (7), этот нуль $x=z(1)$ находим при решении задачи Коши для дифференциального уравнения с производной по параметру и алгебраической правой частью [7]:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{(i+1)\,z}{z^2t^2-(2i+1)(i+1)\,t+(i+1)^2} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \\ z(0) = x_i, \end{cases}$$

где x_i — нуль функции $w_i(z)$, который считаем известным.

Литература

1. *Ватсон Д.Н.* Теория бесселевых функций. М., 1949.
2. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., 1952.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1953.
4. *Рэлей Дж.* Теория звука. М., 1955.
5. *Бройль Л. де.* Электромагнитные волны в волноводах и резонаторах. М., 1948.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1974.
7. *Моденов В.П.* // ДАН СССР. 1987. **296**. № 3. С. 536.

Поступила в редакцию
18.12.00

УДК 539.12.01

МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ НЕТРИВИАЛЬНОЙ СПИРАЛЬНОСТИ И ФЕРМИОННЫЕ НУЛЕВЫЕ МОДЫ

В. Ч. Жуковский, И. В. Мамсуров

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: th180@phys.msu.su

Рассмотрено понятие спиральности магнитного поля и ее связь с топологическим зарядом Черна–Саймонса исходной неабелевой чисто калибровочной конфигурации полей. Получены решения уравнения Дирака, соответствующие нулевым модам, и исследованы их свойства.

Введение

В последнее время большое внимание уделяется исследованию топологических свойств решений уравнений поля для калибровочных бозонов и фермионов в различных конфигурациях внешних фоновых полей. Этот интерес связан с возможностью непрерывного отображения пространств разной или одинаковой размерности друг на друга. При этом понятие топологического заряда играет важную роль (см., напр., [1]).

Так, в случае 4-мерного евклидова пространства топологический заряд характеризует свойства отображения трехмерной сферы в этом пространстве на групповое пространство калибровочной группы $SU(2)$ при условии, что расстояние в евклидовом пространстве $\sqrt{x_E^2} \to \infty$. Это условие вытекает из требования конечности 4-мерного интеграла, определяющего действие калибровочного поля, что равносильно, в свою очередь, требованию, чтобы потенциал на бесконечности представлял собой чистую калибровку.

С другой стороны, оказалось, что и абелевы конфигурации калибровочных полей могут иметь нетривиальные топологические характеристики. Так, в работе [2] было получено абелево магнитное поле с нетривиальной спиральностью из неабелева вакуумного поля группы $SU(2)$.

Было показано, что величина спиральности поля совпадает со значением топологического заряда начального неабелева поля. Согласно теореме Атья–Зингера [3], топологический заряд (индекс Понтрягина) конфигурации калибровочных полей равняется разности между числом право- и левовинтовых решений уравнения Дирака, соответствующих нулевой энергии, которые получены с учетом глобальных граничных условий в данных полевых конфигурациях. Локальные граничные условия вносят поправки в указанное равенство. В частности, в работах [4] и [5] эта теорема была установлена для случая двумерного диска с ненулевой азимутальной компонентой полевого потенциала. Кроме того, в статье [6] было замечено, что теорема Атья–Зингера может быть применена как к компактному многообразию, так и к 4-мерному евклидову пространству с предположением, что поля убывают достаточно быстро с расстоянием.

Как хорошо известно, фермионные нулевые моды играют важную роль в квантовой теории поля, оказывая основное влияние на фермионный определитель, входящий в фундаментальный фейнмановский интеграл квантовой хромодинамики (КХД). Они, в частности, ответственны за нарушение киральной симметрии. Невырожденные нулевые моды уравнения Дирака были исследованы в статье [7]. Было показано, что присутствие этих мод ведет к вырождению солитонного решения для полей Янга–Миллса, которое в этом случае оказывается дублетом с фермионным числом $1/2$.

С математической точки зрения связь между решениями уравнения Дирака и топологическими свойствами фонового поля представляет значительный интерес. В работе [8] было показано, что существует соотношение между дираковскими нулевыми модами и так называемым отображением Хопфа. Это отображение осуществляет проектирование сферы S^3 на сферу S^2, представляя собой пример упомянутого выше непрерывного отображения. Оказалось, что после наложения определенных условий на отображение Хопфа его параметры могут быть использованы для определения как потенциала калибровочного поля, так и решений уравнения Дирака в этом поле. Более того, число нулевых мод, полученное этим путем, очень просто соотносится с величиной индекса соответствующего отображения, а величины полей (после вычитания некоторого фонового поля) совпадают с кривизной отображения Хопфа.

В настоящей статье мы, задавшись целью исследовать фермионные нулевые моды в присутствии абелевой полевой конфигурации, предложенной в работе [2], рассмотрели возможность обобщения задачи [2] на случай перехода к 4-мерному пространству-времени и обнаружили новые нетривиальные решения уравнения Дирака с нулевой массой.

1. Магнитная спиральность

Магнитные поля с ненулевой спиральностью могут быть получены из неабелева вакуумного калибровочного потенциала A_i группы $SU(2)$ в случае чистой калибровки U, когда

$$A_i = U^{-1}\partial_i U,$$

где $i = 1, 2, 3$ (мы рассматриваем статические поля при условии $A_0 = 0$). Тогда число Черна–Саймонса для калибровочного поля A_i

$$N_{CS} = \frac{1}{16\pi^2}\int d^3x\, \varepsilon^{ijk}(A_i^a\partial_j A_k^a + \frac{1}{3}f^{abc}A_i^a A_j^b A_k^c)$$

совпадает с топологическим зарядом поля A_i, соответствующим кратности отображения 3-мерного пространства на калибровочную группу:

$$W(U) = \frac{1}{24\pi^2}\int d^3x\, \varepsilon_{ijk}U^{-1}\partial_i U U^{-1}\partial_j U U^{-1}\partial_k U. \tag{1}$$

Абелево магнитное поле может быть построено (см. [2]) из такой неабелевой вакуумной калибровочной конфигурации путем проектирования последней на заданное направление в изопространстве, характеризующееся постоянным единичным вектором n^a:

$$a_i = i\,\mathrm{tr}(n^a\sigma^a U^{-1}\partial_i U).$$

Можно показать, что величина магнитной спиральности данного магнитного поля

$$H(a) = \frac{1}{16\pi^2}\int d^3x\, \varepsilon^{ijk}a_i\partial_j a_k$$

совпадает с числом обмоток отображения U, т. е. $H(a) = W(U)$ (1). Неабелев вакуумный калибровочный потенциал, соответствующий калибровке

$$U = \mathrm{e}^{\omega^a T^a}, \quad T^a = \sigma^a/2i,$$

может быть задан путем выбора ω^a в простом виде:

$$\omega^a = \hat\omega^a f,$$

где $\hat\omega^a$ представляет собой единичный вектор в изопространстве, совпадающий с радиус-вектором в конфигурационном 3-мерном пространстве: $\hat\omega^a = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, и $f = f(r)$ является функцией только от r.

Полагая, что единичный вектор n^a направлен по третьей оси: $n^a = (0, 0, 1)$, мы получаем векторный потенциал a_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ в следующем виде [2]:

$$a_0 = 0; \quad a_r = f'(r)\cos\theta;$$

$$a_\theta = -\frac{\sin f}{r}\sin\theta; \quad a_\phi = -\frac{1-\cos f}{r}\sin\theta,$$

где $f'(r) = df/dr$, а r, θ, ϕ — сферические координаты.

2. Нулевые моды уравнения Дирака

Рассмотрим решения уравнения Дирака для безмассовых фермионов $(m=0)$ в присутствии фонового магнитного поля с ненулевой магнитной спиральностью. Тогда уравнение Дирака может быть записано в следующей форме:

$$i\alpha_i D_i \psi = iD_0\psi$$

$$(iD_i = i\partial_i - eA_i; \quad i = 1,2,3; \quad iD_0 = i\partial_0 - eA_0).$$

В спинорном представлении имеем:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}.$$

Для случая $m = 0$ лево- и правовинтовые компоненты разделяются:

$$\psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi.$$

Для каждой из этих компонент получаем

$$\begin{aligned} (D_z \mp D_t)\psi_1^{L,R} + (D_1 - iD_2)\psi_2^{L,R} = 0, \\ (D_1 + iD_2)\psi_1^{L,R} - (D_z \pm D_t)\psi_2^{L,R} = 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

где знак плюс соответствует левовинтовой компоненте, а минус — правовинтовой.

В нашем случае выберем калибровочный потенциал в том же виде, как и в [2], однако добавим к нему еще временную компоненту с условием, что $A_0 = -A_z$. Кроме того, в аргументе потенциала мы произведем замену $z \to \xi = t - z$. Заметим, что после указанных изменений потенциал A_μ удовлетворяет калибровочному условию Лоренца

$$\partial_\mu A^\mu = 0,$$

а уравнение Дирака для правовинтовой компоненты может быть решено аналитическими методами.

Другой выбор: $A_0 = A_z$ и $z \to \xi = t + z$ приводит соответственно к тому, что решаемым становится уравнение для левовинтовой компоненты. Таким образом, благодаря цилиндрической симметрии задачи можно перейти к цилиндрическим координатам (ρ, ϕ, z), и мы получаем в общем случае

$$A_0 = -f' + \frac{\rho^2}{\rho^2+\xi^2}\left(f' - \frac{\sin f}{\sqrt{\rho^2+\xi^2}}\right),$$

$$A_r = \frac{\xi r}{\xi^2+\rho^2}\left(f' - \frac{\sin f}{(\rho^2+\xi^2)^{1/2}}\right),$$

$$A_\phi = -\frac{\rho}{\rho^2+\xi^2}(1-\cos f),$$

$$A_z = -A_0.$$

Здесь, как и раньше, $f = f(r)$, а штрихи означают дифференцирование по переменной r.

Магнитная спиральность такого поля остается не зависящей от времени и совпадает со спиральностью, рассмотренной в работе [2]. Ищем решение в виде

$$\psi^R = \begin{pmatrix} e^{il\phi}\,\psi_1 \\ e^{i(l+1)\phi}\,\psi_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда, принимая во внимание, что в цилиндрических координатах

$$\sigma\mathbf{D} = \sigma_\rho D_\rho + \sigma_\phi D_\phi + \sigma_z D_z,$$

где

$$\sigma_\rho = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_\phi = -i\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ -e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

получаем следующую форму уравнения (2), записанного для правовинтовой компоненты:

$$i(\partial_t - \partial_z)\psi_1 + \left(i\partial_\rho + \frac{i(l+1)}{\rho} - \frac{\xi\rho}{\rho^2+\xi^2}\left(f' - \frac{\sin f}{\sqrt{\rho^2+\xi^2}}\right) - \frac{i\rho}{\rho^2+\xi^2}(1-\cos f)\right)\psi_2 = 0,$$

$$\left(i\partial_\rho - \frac{il}{\rho} - \frac{\xi\rho}{\rho^2+\xi^2}\left(f' - \frac{\sin f}{\sqrt{\rho^2+\xi^2}}\right) + \frac{i\rho}{\rho^2+\xi^2}(1-\cos f)\right)\psi_1 + \left(i\partial_t - i\partial_z + 2f' - \frac{2\rho^2}{\rho^2+\xi^2}\left(f' - \frac{\sin f}{\sqrt{\rho^2+\xi^2}}\right)\right)\psi_2 = 0.$$

Очевидно, что для получения нормируемого решения мы должны положить $\psi_2 = 0$.

Будем искать решение в виде $\psi_1 = \psi_1(t - z, \rho)$. Тогда, поскольку в этом случае $(\partial_z + \partial_t)\psi_1 = 0$, получаем

$$\left(\partial_\rho - \frac{l}{\rho} + \frac{i\xi\rho}{\rho^2+\xi^2}\left(f' - \frac{\sin f}{\sqrt{\rho^2+\xi^2}}\right) + \frac{\rho}{\rho^2+\xi^2}(1-\cos f)\right)\psi_1 = 0.$$

Решение последнего уравнения можно записать в интегральной форме:

$$\psi_1 = F(\xi)\rho^l \exp\left\{-\int d\rho\left(\frac{\rho}{\rho^2+\xi^2}(1-\cos f) + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{i\xi\rho}{\rho^2+\xi^2}\left(f' - \frac{\sin f}{\sqrt{\rho^2+\xi^2}}\right)\right)\right\}. \tag{3}$$

Здесь $F(\xi)$ является произвольной функцией ξ.

Мы расмотрим два конкретных вида функций f, которые фигурировали в работе [2]:

$$f = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{(\rho^2+\xi^2)^{1/2}}{\rho_0}, \qquad \rho_0 = \mathrm{const},$$

что соответствует полуцелому значению топологического заряда: $N_{CS} = 1/2$, и

$$f = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{(\rho^2+\xi^2)^{1/2}}{\rho_0},$$

что соответствует целому его значению: $N_{CS} = 1$.

Начнем с первого случая. Тогда векторный потенциал приобретет следующую форму:

$$A_\rho = 0,$$

$$A_\phi = -\frac{2\rho}{\rho^2+\xi^2+\rho_0^2},$$

$$A_z = \frac{2\rho_0}{\rho^2+\xi^2+\rho_0^2},$$

$$A_0 = -A_z.$$

При этом интеграл, стоящий в аргументе экспоненты, может быть вычислен в явном виде, и мы получаем

$$\psi_1 = F(\xi)\frac{\rho^l}{\rho^2+\xi^2+\rho_0^2}.$$

Данное решение не будет иметь особенностей при $\rho = 0$, если положить $l = 0$, и его можно сделать нормируемым, если потребовать, чтобы $|F(\xi)|$ росло на бесконечности медленнее, чем $\xi^{1/2}$. В результате получаем нормированное решение:

$$\psi_1 = \frac{F(\xi)}{\rho^2+\xi^2+\rho_0^2},$$

где $F(\xi)$ удовлетворяет упомянутому выше условию.

К сожалению, при втором выборе функции f результаты будут менее обнадеживающими. В этом случае потенциал имеет вид

$$A_\rho = \frac{8\rho_0\rho\xi}{(\rho_0^2+\rho^2+\xi^2)^2},$$

$$A_\phi = -\frac{8\rho_0\rho\xi}{(\rho_0^2+\rho^2+\xi^2)^2},$$

$$A_0 = \frac{4\rho_0(\rho^2-\rho_0^2-\xi^2)}{(\rho^2+\xi^2+\rho_0^2)^2},$$

$$A_z = -A_0.$$

Интеграл в аргументе экспоненты (3) также вычисляется, и в результате мы находим

$$\psi_1 = F(\xi)\rho^l \exp\left\{-\frac{2\rho_0(2i\xi+\rho_0)}{\rho_0^2+\rho^2+\xi^2}\right\}.$$

Данное решение, как видно, невозможно сделать нормируемым ни при каких значениях $F(\xi)$ и l.

Заключение

Полученные выше решения уравнения Дирака, отвечающие нулевой энергии, имеют форму плоской волны, распространяющейся в направлении оси z. Эти решения зависят от произвольной функции $F(\xi)$ и значения l. Частный вид этой функции может быть найден после выбора соответствующих дополнительных условий, налагаемых на поведение дираковской волновой функции. В наиболее простом случае, когда $F = \mathrm{const}$ и $l = 0$, поверхности уровня такого решения имеют форму сферы, центр которой распространяется со скоростью света. Следует отметить, что нормируемое решение удалось получить только при одном выборе функции f, соответствующем полуцелому топологическому заряду. То обстоятельство, что выбор этой функции, отвечающий целому заряду, не дает возможности получить решение с конечной нормой, является достаточно неожиданным и представляет интерес для дальнейшего исследования.

Литература

1. *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В.* Калибровочные поля. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
2. *Jackiw R., So-Young Pi.* E-print Archive: hep-th/9811077.
3. *Atiyah M.F., Patodi V.K., Singer I.M.* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1975. **77**. P. 43; 1976. **79**. P. 71; *Eguchi T., Gilkey P., Hanson A.* // Phys. Reports. 1980. **66**. P. 213.
4. *Ninomiya M., Tan C.* // Nucl. Phys. 1985. **B257**. P. 199.
5. *Zhong-Qi Ma.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1986. **19**. L321.
6. *Jackiw R., Rebbi C.* // Phys. Rev. 1977. **D16**. P. 1052.
7. *Jackiw R., Rebbi C.* // Phys. Rev. 1976. **D13**. P. 3398.
8. *Adam C., Muratori B., Nash C.* E-print Archive: hep-th/0001164.

Поступила в редакцию
17.01.01