

5. Silverberg P., Omling P., Samuelson L. // Appl. Phys. Lett. 1988. **52**, No. 20. P. 1689.
6. Martin G.M., Mitonneau A., Mircea A. // Electron. Lett. 1977. **13**, No. 7. P. 191.
7. Osaka J., Okamoto H., Kobayashi K. // Semi-Insulating III-V Materials / Ed. H. Kukimoto, S. Miyazawa. Hakone, Japan: Ohmsha Publishers, 1986. P. 156.
8. Markov A.V., Polyakov A.Y., Smirnov N.B. et al. // Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. 2000. **A439**. P. 651.
9. Verbitskaya E., Eremin V., Ivanov A. et al. // Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. 2000. **A439**. P. 634.
10. Neild S.T., Skowronski M., Lagowski J. // Appl. Phys. Lett. 1991. **58**, No. 8. P. 859.
11. Bourgoin J.C., Bardeleben H.J., Stievenard D. // J. Appl. Phys. 1988. **64**. R 65.

Поступила в редакцию  
05.02.01

ГЕОФИЗИКА

УДК 551.511.32

## НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОТНОСТИ АТМОСФЕРЫ ПО ДАННЫМ ГЛОБАЛЬНОГО КЛИМАТИЧЕСКОГО АРХИВА NCDC

А. Б. Володин, В. П. Юшков

(кафедра физики атмосферы)

E-mail: atmos@phys.msu.su

**Представлены основные статистические характеристики распределения плотности воздуха в целом по земному шару. Проведен пространственно-временной анализ глобальных метеорологических данных. Рассчитаны не только точные значения амплитуды и фазы годового хода, но и зональный, вертикальный и меридиональный разрезы поля плотности распределения. Предложенный подход позволяет с помощью относительно небольшого числа коэффициентов описать главные статистические характеристики климата Земли.**

### Введение

К настоящему времени предложено много различных моделей климата. Хорошие и достаточно полные обзоры есть, например, в работах [1, 2]. Обычно используются два подхода. Первый — динамический, к нему относятся как сложные гидродинамические, так и простые энергобалансовые модели. Однако динамическое моделирование вряд ли полностью адекватно наблюдениям: все известные временные ряды наблюдений длительностью от нескольких суток до миллионов лет демонстрируют стохастический характер, а в динамических моделях не учитываются статистические характеристики. Гидродинамические уравнения, например, допускают для переменных, которые описывают средние поля, весьма произвольное распределение флуктуаций.

Второй подход — статистический, в котором изучаются статистические свойства климатических процессов, т. е. их стационарность, время и масштаб корреляции, другие характеристики распределений. Применение статистического анализа в климатических исследованиях — широко распространенная практика. Хорошо известны работы Адема [3], Хассельмана [4], Норта [5] и др. Среди последних работ можно отметить книгу С.Г. Добровольского [1], в которой приведена также обширная библиография. Однако традиционный статистический анализ почти всегда описывает климатические аномалии по

отношению к норме климатического распределения, которая полагается известной.

В то же время само определение климатической нормы характеристик атмосферы остается серьезной проблемой для климатологов. Традиционный подход состоит в привязке данных наблюдений к узлам регулярной географической сетки с помощью методов объективного анализа и последующем усреднении данных в пределах каждого месяца года. Однако такое определение климатической нормы еще оставляет в климатических полях значительную случайную пространственную изменчивость, неоправданно сглаживая (из-за усреднения) временные колебания.

Цель настоящей работы — проверка возможности сглаживания климатических полей путем разложения их в ряды по эмпирическим собственным функциям на основе разложения второго момента. Эта идея была предложена еще А.М. Обуховым в 1950-х гг. (см. [6]). Главный вопрос заключается в следующем: можно ли наблюдаемые метеорологические поля описать с помощью небольшого числа таких функций? Как показывают исследования многих авторов, для аномалий, в частности, поля температуры такие ряды разложения сходятся очень медленно (см., напр., [5]). Однако сходимость этих рядов существенным образом зависит от выбора исследуемой характеристики. Поэтому в настоящей работе, в отличие от подавляющего большинства подобных работ, в качестве основной случайной

характеристики выбрана не аномалия, а величина  $\tilde{\psi}(\mathbf{x}) = \sqrt{\rho_a(\mathbf{x})/M_a}$ , второй момент которой  $B_\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  должен быть связан с плотностью распределения частиц («средних» молекул) в атмосфере (здесь  $\rho_a(\mathbf{x})$  — плотность воздуха,  $M_a$  — масса всей атмосферы,  $\mathbf{x} = \{\mathbf{r}, t\}$ ,  $\mathbf{r}$  — пространственная координата точки в атмосфере Земли,  $t$  — время). Для этого требуется расширить традиционный автокорреляционный подход [7] и использовать его для поиска распределения среднего поля нестационарной и неоднородной случайной функции.

### Описание климатического архива

При проведении работы в нашем распоряжении был архив климатических данных «Global Gridded Upper Air Statistics» (GGUAS). В нем собраны усредненные данные за период с 1980 по 1995 г. Создателем этого архива является Американский национальный центр климатической информации (NCDC). В архиве также использованы данные Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды (ECMWF) и данные Всемирной метеорологической организации (WMO).

Данные архива NCDC описывают атмосферу по всему земному шару для каждого месяца года. Все величины представлены на сетке  $2.5^\circ \times 2.5^\circ$  для 14 стандартных изобарических уровней (от 1000 до 10 мбар) и земной поверхности. В архиве представлены средние величины и стандартные отклонения для давления на уровне моря, скорости ветра, температуры воздуха, точки росы, высоты изобарического уровня, плотности воздуха, а также восьмилепестковой розы ветров.

Для создания архива использовались ежедневные метеорологические данные, получаемые дважды в день мировой сетью метеостанций и на кораблях. Исходные данные рассчитывались специалистами ECMWF. При этом проводилась оценка их качества и сомнительные элементы удалялись. Большое число наблюдений, использованных при усреднении, обеспечивает высокую надежность данных архива NCDC.

Для целей настоящей работы из этого архива использовались только данные о высоте геопотенциала и плотности воздуха на соответствующих изобарических уровнях.

### Постановка задачи

Рассмотрим сначала случайную функцию  $\tilde{\psi}(\mathbf{x})$  в виде  $\psi(\mathbf{x})\tilde{u}(\mathbf{x})$ , где  $\psi(\mathbf{x})$  — детерминированная, а  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  — однородная и стационарная случайная функция, т.е. распределение  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  инвариантно по отношению к сдвигу системы координат. В этом случае корреляционная функция

$$R_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{M(\tilde{u}(\mathbf{x})\tilde{u}(\mathbf{x}')) - M_u^2}{\sigma_u^2}$$

зависит только от разности координат, а  $\tilde{\psi}(\mathbf{x})$  рассматривается как случайная функция общего вида, распределение которой зависит от  $\psi(\mathbf{x})$  как от параметра. Многие

известные результаты, которые получены для однородных (стационарных) случайных функций, например, в работах по турбулентности атмосферы [4], можно расширить на случай таких «обобщенных» случайных функций.

При этом все характеристики распределения случайной функции  $\tilde{\psi}(\mathbf{x})$  выражаются через характеристики  $\tilde{u}(\mathbf{x})$ . Если масштаб корреляции  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  много меньше масштаба всей системы, то, не уменьшая общности вывода, можно считать, что функция  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  имеет гауссово распределение. Если это не так, всегда можно рассмотреть среднее значение функции  $\tilde{\psi}$  по некоторой области, большей области корреляции  $\tilde{u}(\mathbf{x})$ , распределение которого стремится к нормальному. Отметим, что функция  $\tilde{\psi}(\mathbf{x})$  не является однородной и стационарной и, хотя в каждой точке  $\mathbf{x}$  распределение «наблюдений» этой функции гауссово, распределение случайной величины  $\tilde{\psi}$  в пространстве  $\{\mathbf{x}\}$  не будет гауссовым. Так, например, математическое ожидание нашей функции  $\tilde{\psi}$  зависит от  $\mathbf{x}$ :  $M\tilde{\psi}(\mathbf{x}) = M_u\psi(\mathbf{x})$ . Мы не можем считать, что  $M_u = 0$ , так как для этого нужно знать значение  $M\tilde{\psi}(\mathbf{x})$ , что и составляет цель нашего анализа.

Для однородной и стационарной функции  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  вычисление математического ожидания можно приближенно заменить интегрированием по пространству и времени. Точность этой замены зависит от характерного масштаба корреляции  $R_u$ . В том случае, если масштаб корреляции  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  много меньше масштаба изменения  $\psi(\mathbf{x})$ , математическое ожидание  $\psi(\mathbf{x})$  близко к среднему по пространству-времени в окрестности точки  $\mathbf{x}$ . Однако, в силу ограниченности сети пунктов метеорологических наблюдений, мы не можем провести такое усреднение.

Поэтому рассмотрим осредненный по  $\bar{\mathbf{x}} = \frac{(\mathbf{x}+\mathbf{x}')}{2}$  во всей области наблюдений  $D$  второй момент функции  $\tilde{\psi}(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D} \int M(\tilde{\psi}(\mathbf{x})\tilde{\psi}(\mathbf{x}')) d\bar{\mathbf{x}} = \\ & = \frac{1}{D} \int \psi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}')M(u(\mathbf{x})u(\mathbf{x}')) d\bar{\mathbf{x}} = \\ & = \frac{M_u^2 + \sigma_u^2 R_u(\Delta\mathbf{x})}{D} \int \psi\left(\bar{\mathbf{x}} + \frac{\Delta\mathbf{x}}{2}\right)\psi\left(\bar{\mathbf{x}} - \frac{\Delta\mathbf{x}}{2}\right) d\bar{\mathbf{x}} = \\ & = \bar{B}_\psi(\Delta\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ .

Этот второй момент, как положительно определенное ядро, может быть разложен в области  $D$  по теореме Карунена-Лозева в ряд по собственным функциям:

$$\int \psi_i(\mathbf{x}')\bar{B}_\psi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \mu_i\psi_i(\mathbf{x}), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Функцию  $\psi(\mathbf{x})$  разложим по этой же системе собственных функций:  $\psi(\mathbf{x}) = C \sum_i C_i\psi_i$ , так что

$\sum_i C_i^2 = 1$ , а  $C$  — нормировочный множитель, в который можно включить и  $M_u$ . Тогда, если характерный масштаб корреляционной функции  $R_u$  много меньше некоторого характерного масштаба  $D_\Delta$ , который в свою очередь меньше масштаба изменения  $\psi(x)$ , плотность вероятности  $\rho(x)$  можно выразить через математическое ожидание от плотности атмосферы в окрестности  $D_\Delta$  точки  $\bar{x}$  путем усреднения произведений функций  $\psi(x)$  и  $\psi(x')$ , разнесенных на  $\Delta x = x' - x$ . Тогда эту плотность вероятности можно выразить через те же собственные функции второго момента  $\overline{B_\psi}(\Delta x)$ :

$$\rho(x) \approx M \left( \frac{1}{D_\Delta} \int \tilde{\psi} \left( \bar{x} + \frac{\Delta x}{2} \right) \tilde{\psi} \left( \bar{x} - \frac{\Delta x}{2} \right) d\Delta x \right) = \\ = \psi^2(x^*) \left( M_u^2 + \frac{\sigma_u^2}{D_\Delta} \int R(\Delta x) d\Delta x \right) \approx M_u^2 \psi^2(\bar{x})$$

(здесь  $x^*$  — некоторая точка в окрестности  $D_\Delta$  точки  $\bar{x}$ ).

Таким способом можно оценить плотность распределения частиц в атмосфере по определяемому в настоящей работе второму моменту  $\overline{B_\psi}(\Delta x)$ . Собственные значения этого момента  $\mu_i$  в случае  $\delta$ -подобной корреляционной функции  $R_u$  (белого шума) совпадают с коэффициентами разложения  $C_i^2$ .

### Алгоритм вычислений

Координата  $x = \{r, \varphi, \theta, t\}$  включает в себя три сферические координаты по пространству и одну по

времени. Заметим, что в сферических координатах функция  $\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(r, \varphi, \theta, t)$  при фиксированных  $r, \theta, t$  является периодической по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Из-за ограниченности данных используемого климатического архива (только многолетние среднемесячные данные) будем считать, что плотность воздуха при фиксированных  $r, \theta, \varphi$  также будет меняться периодически с периодом  $T = 12$  мес. Хотя интегрирование по высоте необходимо проводить в пределах всей атмосферы, климатический архив NCDC позволяет интегрировать только до высот  $\sim 28$  км. Это не может существенным образом повлиять на точность наших вычислений, так как выше 28 км находится лишь сотая доля всей массы атмосферы ( $p < 10$  мбар) и изменением этой доли можно пренебречь (ее среднее значение войдет в постоянную нормировки).

В климатическом архиве NCDC плотность воздуха задается по  $\varphi, \theta$  и  $t$  с постоянным шагом, а по  $r$  сетка неравномерная. Поэтому для перехода к вычислению разностных интегралов необходимо интерполировать эти данные в каждой точке  $\varphi_m, \theta_l$  и  $t_n$  на равномерную сетку по высоте. Учитывая приближенную зависимость плотности воздуха от высоты (по барометрической формуле), мы использовали метод выравнивания [8] и интерполировали логарифм плотности. Поскольку измеряемые величины имеют стохастический характер, мы ограничились линейной двухточечной интерполяцией.

Проведенная интерполяция позволяет задать значения плотности воздуха на сетке  $r_i = R_0 + h_r i$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots, 28$ ,  $h_r = 1000$  м. Некоторые разрезы поля плотности приведены на рис. 1.

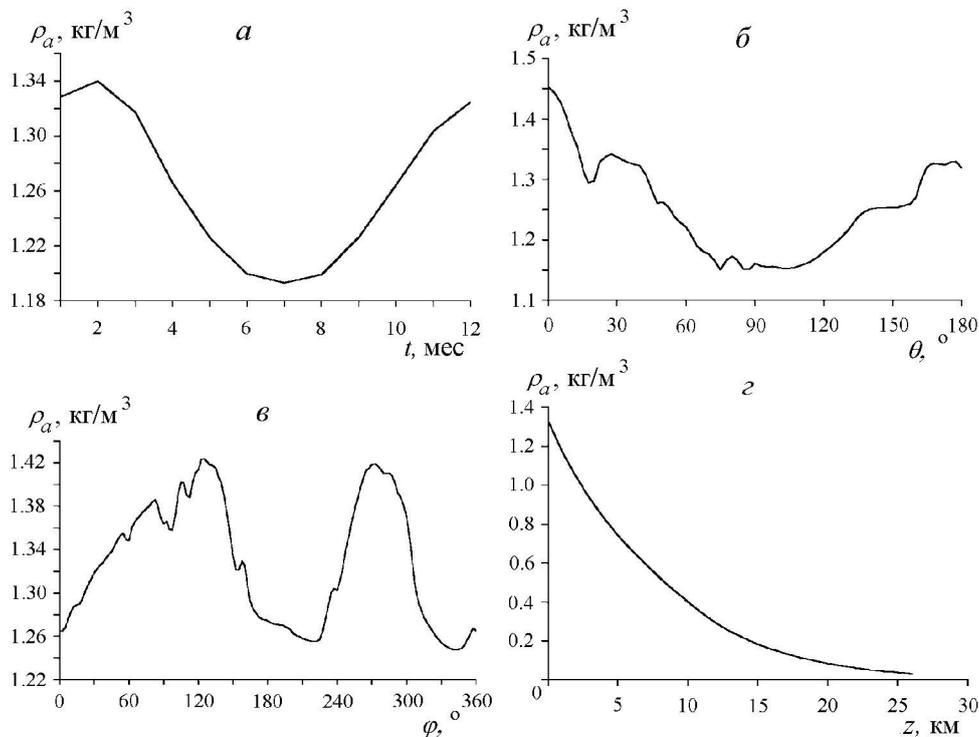


Рис. 1. Некоторые разрезы поля плотности воздуха по данным архива NCDC при изменении одной из координат, когда другие фиксированы (высота над поверхностью Земли  $r = 0$ , долгота  $40^\circ$ , широта  $55^\circ$ , месяц — январь): зависимость плотности воздуха у поверхности Земли от времени (а), широты (б) и долготы (в); изменение плотности с высотой (г)

Вычисление интегралов вторых моментов типа  $B_\psi(\Delta r, 0, 0, 0)$  (обозначим их для простоты  $B_t, B_\theta, B_\varphi, B_r$ ) проиллюстрируем на примере определения  $B_r(\Delta r)$ :

$$B_r(\Delta r) = \frac{1}{D} \int_0^{12} dt \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_{R_0+H/4}^{R_0+3H/4} \tilde{\psi}\left(r - \frac{\Delta r}{2}, \varphi, \theta, t\right) \tilde{\psi}\left(r + \frac{\Delta r}{2}, \varphi, \theta, t\right) r^2 dr.$$

Здесь  $D = 2\pi R_0^2 HT$ ,  $R_0 = 6\,371\,032$  м,  $H = 28\,000$  м,  $T = 12$  мес.

При интегрировании по  $r$  использовалась формула Симпсона. Интегралы по  $t$  и  $\varphi$  вычисляются на равномерной сетке с совпадающими граничными точками и могут быть рассчитаны с помощью последовательного применения формулы средних.

Вычисление  $B_\theta$  имеет дополнительную особенность, связанную с тем, что функция  $\tilde{\psi}(\theta)$  задана на ограниченном интервале  $[0, \pi]$ . Однако можно вычислить  $B_\theta$  при  $\Delta\theta \neq 0$  и  $\theta \in [0, \pi]$ , если расширить область определения функции  $\tilde{\psi}(\theta)$  с помощью условия  $\tilde{\psi}(-\theta, \varphi) = \tilde{\psi}(\theta, \varphi + \pi)$  и  $\tilde{\psi}(\theta + \pi, \varphi) = \tilde{\psi}(\pi - \theta, \varphi + \pi)$ . При этом  $B_\theta$  при  $\Delta\theta + \pi$  будет симметричным отражением  $B_0$  при  $\pi - \Delta\theta$ .

Четырехкратное применение формул численного интегрирования приводит к следующей оценке погрешности вычислений [5]:  $\delta B =$

$= o(h_r^4 + h_\varphi^4 + h_\theta^4 + h_t^4)$ . Предварительный анализ показал, что использование формул численного интегрирования более высокого порядка для случайных полей не годится из-за роста случайных значений старших производных.

Дополнительную погрешность в расчет второго момента вносит доля атмосферы, которая не охвачена метеорологическими наблюдениями. Поскольку информация о характеристиках атмосферы в архиве NCDC приведена до уровня 10 мбар, а давление на поверхности — около 1000 мбар, то оставшаяся нерассмотренной доля атмосферы составляет около 1% массы всей атмосферы. Выше уровня 10 мбар можно лишь экстраполировать плотность воздуха экспонентой, и поэтому абсолютные значения второго момента имеют точность порядка 0.1%.

### Результаты

На основе изложенного выше алгоритма были составлены программы. Для удобства анализа все перечисленные моменты второго порядка были нормированы на величину  $B_0 \equiv B(0, 0, 0, 0)$ . Экспериментально полученный второй момент демонстрирует четкую структуру корреляционной зависимости, которая описывается небольшим числом гармоник (рис. 2). В то же время измеренные значения плотности атмосферы в разных местах и от месяца к месяцу характеризуются выраженной хаотичностью (рис. 1). То есть метод статистического анализа дает величины, которые можно считать средними по климатическому ансамблю наблюдений.

Временной ход второго момента (рис. 2, а) хорошо описывается в основном годовой гармоникой. Ее

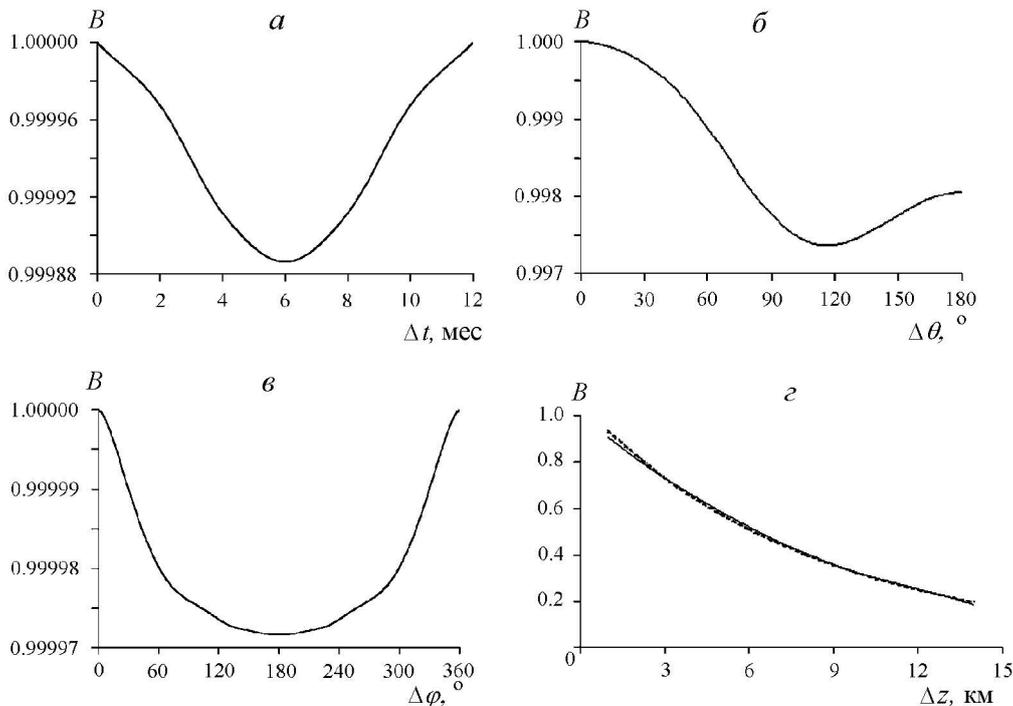


Рис. 2. Основные разрезы поля второго момента случайной функции  $\tilde{\psi} = \rho(z, \theta, \varphi, t)/M_a$  по времени (а), широте (б), долготе (в) и высоте (г). Штриховой линией показан экспоненциальный профиль

амплитуда дает информацию о том, какой порядок имеют изменения плотности вероятности в годовом ходе. Изменения плотности при изменении широты показаны на рис. 2, б. Они определяются климатически значимыми изменениями температуры и давления. В результате получаем некую среднюю изменчивость «высоты атмосферы» по широте, которая описывается прежде всего первым членом разложения по системе сферических функций.

В разложении  $V_\psi(\Delta\varphi)$  нет четко выраженной первой гармоники. Слабый спад второго момента описывает случайную изменчивость плотности, связанную с географической изменчивостью — распределением океанов и континентов.

Профиль  $V_r$  практически не отличается от экспоненциального (рис. 2, в). Более детальный анализ позволяет связать наблюдаемые отличия с линейным вертикальным профилем температуры в нижней тропосфере.

Таким образом, даже из представленных результатов видно, что главный член разложения  $V_\psi$  описывает состояние равновесия, следующий член разложения имеет не очень большую амплитуду ( $\sim 10^{-3}$ ), а третий член гораздо меньше второго. Можно ожидать, что четвертый и последующие члены будут еще меньше. Таким образом, достаточно знать всего несколько первых членов разложения, чтобы описать климатически значимые изменения плотности.

Для нормирования поля плотности были рассчитаны и основные интегральные параметры атмосферы. Масса всей атмосферы является важной константой для геофизики. Обычно для ее вычисления используется барометрическая формула  $dp/dz = -g\rho$ , где  $g \approx 9.81$  м/с<sup>2</sup> — среднее ускорение свободного падения для всей атмосферы с учетом центробежной силы. Тогда

$$-\int_0^\infty g\rho dz dS = gM^a = \int p_0 dS = R_0^2 \iint p_0 \cos\theta d\theta d\varphi.$$

По данным архива NCDC хорошо видно, что среднее атмосферное давление у поверхности Земли имеет выраженный годовой ход с амплитудой порядка  $10^{-6}\bar{p}_0$ , где  $\bar{p}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p_0(t) dt = 1011.37$  мбар.

Таким образом,  $M_a = 5.26 \cdot 10^{18}$  кг. Эта величина совпадает со значением, полученным путем прямого интегрирования плотности с точностью  $\sim 1\%$ , с учетом того, что в архиве самым верхним является уровень 10 мбар.

Приведенную высоту однородной атмосферы  $H_0$  можно вычислить по средней плотности атмосфе-

ры вблизи поверхности Земли. По данным архива NCDC,  $\bar{\rho}_a(0) = 1.215$  кг/м<sup>3</sup> и

$$H_0 = \frac{M_a}{4\pi\rho_a(0)R_0^2} = 8387 \text{ м.}$$

Эта величина является важным климатологическим параметром, который определяет скорость распространения крупномасштабных волн в атмосфере ( $\sqrt{gH_0}$ ) и частоту плавучести (Брента–Вяйсяля —  $\sqrt{g/H_0}$ ). По данным многолетних наблюдений можно рассчитать, как меняется величина  $H_0$  с годами. (Существуют косвенные свидетельства того, что приведенная высота атмосферы за последние 30 лет несколько изменилась.)

### Заключение

Корреляционный пространственно-временной анализ глобальных метеорологических данных позволяет определить основные статистические параметры климатического поля. Хотя общие закономерности климатического распределения атмосферных параметров — температуры, давления, скорости ветра — хорошо известны, корреляционный анализ позволяет рассчитать не только точные значения амплитуды и фазы годового хода и его гармоник, но и зональный, вертикальный и меридиональный разрезы поля плотности распределения. С помощью предложенного подхода можно описать основные характеристики климата Земли, используя относительно небольшое число коэффициентов, сравнить по этим характеристикам разные климатические архивы, разные теоретические модели климата и оценить отклонение результатов, полученных из расчетов по этим моделям, от данных наблюдений.

### Литература

1. *Dobrovolsky S.G.* Stochastic Climate Theory and Its Applications. Springer-Verlag, 1999.
2. *Henderson-Sellers A., McGuffie K.* A Climate Modelling Primer. Chichester: Wiley, 1988.
3. *Adem J.* // Mon. Weather Rev. 1981. **92**. P. 91.
4. *Hasselmann K.* // Tellus. 1987. **28**. P. 473.
5. *North G.R.* // J. Atmos. Sci. 1984. **41**. P. 504.
6. *Обухов А.М.* Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1988.
7. *Яглом А.М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеиздат, 1978.
8. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию  
28.02.00