КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517:958

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ О НЕРЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ

А. Л. Делицын

(*кафедра математики*)

E-mail: delitsin@math356.phys.msu.su

Рассматривается спектральная задача о волноводе со вставкой в виде проницаемого рассеивателя. Устанавливается существование бесконечного числа точек дискретного спектра, погруженных в непрерывный спектр для определенного вида рассеивателей.

Существованию ловушечных мод в нерегулярных волноводах посвящено большое количество работ (см., напр., [1–4]). В то же время исследуются собственные значения спектральных задач, расположенные ниже границы непрерывного спектра. Соответствующих собственных значений может быть лишь конечное число. В настоящей заметке приводится пример задач с собственными значениями, погруженными в непрерывный спектр. Число собственных значений бесконечно. С физической точки зрения подобные собственные значения и отвечающие им собственные векторы соответствуют ловушечным модам в задаче рассеяния на проницаемом препятствии в волноводе.

Рассматривается задача в цилиндре $Q = ((x,y) \in \Omega, z \in (-\infty,\infty))$, где $\partial\Omega$ — бесконечно гладкий контур,

$$-\Delta u = k^2 q(z) u, \tag{1}$$

$$u|_{\partial Q} = 0, \quad u \in L_2(Q).$$

Функция $q(z)$ тождественно равна единице при $z < z_1$, $z > z_2$ и больше единицы при $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$.

Рассмотрим оператор $q^{-1}\Delta$, действующий в весовое пространство $L_2(q,Q)$ с нормой

$$||u||^2_{L_2(q,Q)} = \int\limits_Q q u^2 dV,$$

с областью определения

$$D(q^{-1}\Delta) = (u \in L_2(q,Q), q^{-1}\Delta u \in L_2(Q)).$$

Оператор $q^{-1}\Delta$ является, очевидно, самосопряженным (см. [5]). Легко видеть [1, 2], что непрерывный спектр оператора $q^{-1}\Delta$ занимает полуось $[\mu_1,\infty)$, где μ_1 — первое собственное число задачи

$$-\Delta_{-}\psi = \mu\psi, \tag{2}$$

$$\psi_1|_{\partial\Omega} = 0,$$

рассматриваемой в поперечном сечении Ω.

Покажем, что существует бесконечное число собственных значений задачи (1). Будем искать решения вида

$$u_n = Z_n(z)\psi_n(x,y),$$

где $\psi_n(x,y)$ — собственные функции задачи (2). В результате для функций $Z_n(z)$ получим задачу

$$-Z_n''(z) + \mu_n Z_n(z) = k^2 q(z) Z_n(z),$$

$$Z_n \in L_2(-\infty,\infty).$$

При каждом n существует хотя бы одно решение задачи для $Z_n(z)$. Докажем последнее утверждение.

Введем новый спектральный параметр

$$\gamma_n^2 = \mu_n - k^2.$$

Относительно γ_n^2 задача принимает вид

$$-Z_n'' - \mu_n(q-1)Z_n = -\gamma_n^2 q Z_n,$$

$$Z_n \in L_2(-\infty,\infty).$$

Доказательство существования собственного значения γ_n^2 при любой функции q указанного вида практически эквивалентно доказательству существования решения собственного значения оператора Шрёдингера с финитным отрицательным потенциалом в одномерном случае [5].

Рассмотрим оператор

$$H = q^{-1}\Big(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu_n(q-1)\Big),$$

действующий в пространство $L_2(q,(-\infty,\infty))$, с областью определения

$$D(H) = (Z \in L_2(q,(-\infty,\infty))),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} u \in L_2(q,(-\infty,\infty)).$$

Оператор H самосопряженный. Непрерывный спектр оператора H занимает полуось $[0,\infty)$. Для доказательства существования собственного значения оператора H достаточно показать [5], что существует элемент $Z(z)$, для которого отношение Рэлея

$$\frac{(Z',Z')_{L_2} - \mu_n((q-1)Z,Z)_{L_2}}{(qZ,Z)_{L_2}} < 0.$$

В качестве функции Z возьмем $\eta(\alpha z)$, где $\eta(z) \in C^\infty$, $0 \leqslant \eta(z) \leqslant 1$:

$$\eta(z) = \begin{cases} 1, & |z| < 1, \\ 0, & |z| > 2. \end{cases}$$

При достаточно большом α имеет место неравенство

$$\Big(\eta'(\alpha z), \eta'(\alpha z)\Big)_{L_2} - \mu_n\Big((q-1)\eta(\alpha z), \eta(\alpha z)\Big)_{L_2} < 0. \tag{3}$$

Действительно,

$$\Big((q-1)\eta, \eta\Big)_{L_2} = \int\limits_{z_1}^{z_2} (q-1)\, dz > 0$$

при достаточно большом α. Первое слагаемое в неравенстве (3) стремится к нулю:

$$\Big(\eta'(\alpha z)\eta'(\alpha z)\Big)_{L_2} = \alpha \int\limits_{-2}^{2} \big(\eta'(v)\big)^2\, dv \to 0, \quad \alpha \to 0.$$

Таким образом, существует бесконечное множество решений задачи (1), имеющих вид $Z_n(z)\psi_n(x,y)$.

Литература

1. *Exner P., Seba P.* // J. Math. Phys. 1989. **30**. P. 2574.
2. *Bulla W., Gesztesy F., Renger W., Simon B.* // Proc. AMS. 1997. **125**, No. 5. P. 1487.
3. *Evans D.V., Levitin M., Vassiliev D.* // J. Fluid Mech. 1994. **261**. P. 21–31.
4. *Делицын А.Л.* // ЖВМ и МФ. 2000. № 4 (в печати).
5. *Рид А., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию
29.12.00

РАДИОФИЗИКА

УДК 621.391

О ГЕНЕРАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ КЛЮЧЕВЫХ ПОТОКОВ В СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМАХ КРИПТОГРАФИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

Н. В. Евдокимов, В. П. Комолов, П. В. Комолов, А. А. Руденко

(*кафедра радиофизики*)

E-mail: ne@nist.fss.ru

Рассмотрена возможность формирования непрерывных ключевых потоков в симметричных криптосистемах с помощью использования интерференции радиоколебаний с иррационально-связанными частотами. Такие системы могут иметь скрытые параметры и «реакцию на подслушивание».

При передаче сообщений с помощью криптографической связи потоковое шифрование обеспечивает наибольшую рабочую криптостойкость в случае непрерывных ключевых потоков с пуассоновским распределением. Это эквивалентно однократному использованию ключа (так же как ключа Вернама), что позволяет решить основные проблемы криптографии, относящиеся к передаче и хранению секретного ключа [1]. Естественно, что в таких системах ключевые потоки связанных абонентов должны быть когерентны. Решение этой проблемы возможно с помощью четырехлучевой интерференции радиосигналов, имеющих близкие иррационально-связанные частоты [2].

Несоизмеримость частот иррационально-связанных колебаний означает отсутствие у них общих резонансов. Поэтому их интерференция приводит к детерминированному динамическому хаосу. При ограничении амплитуды колебаний и регулярных выборках их знаковых корреляций такой динамический хаос представляет собой случайную битовую последовательность нулей и единиц, т. е. двоичное иррациональное число. Подобные хаотические последовательности могут быть когерентны в двух пространственно разнесенных точках радиоприема при следующих условиях: 1) в каждой точке прием и задержка колебаний проводятся с частотным разделением, 2) после задержки когерентные