Литература

1. *Пенроуз Р.* Структура пространства-времени. М.: Мир, 1972.
2. *Matzner R.A.* // J. Math. Phys. 1968. **9**. P. 163.
3. *Sánchez N.G.* // J. Math. Phys. 1976. **17**. P. 688.
4. *Sánchez N.G.* // Phys. Rev. 1977. **D16**, No. 4. P. 937.
5. *Sánchez N.G.* // Phys. Rev. 1978. **D18**, No. 4. P. 1030.
6. *Sánchez N.G.* // Phys. Rev. 1978. **D18**, No. 6. P. 1798.
7. *Andersson N.* // Phys. Rev. 1995. **D52**, No. 4. P. 1808.
8. *Leaver E.W.* // J. Math. Phys. 1986. **27**, No. 5. P. 1238.
9. *Persides S.* // J. Math. Phys. 1973. **14**. P. 1017.
10. *Титчмарш Э.Ч.* Разложение по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями II порядка. Т. 1. М.: ИЛ, 1960.
11. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. школа, 1970.
12. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию
27.12.00

УДК 53:51

ОЦЕНКА ТОРЦЕВЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ НАГРЕВЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА В КОНЕЧНОМ СОЛЕНОИДЕ

Р. В. Будник, В. Б. Гласко

(*кафедра математики*)

E-mail: budnik@narod.ru

Рассматривается двумерная задача нагрева стальных цилиндрических образцов в соленоидальном индукторе. Получены численные оценки толщины слоя, прогретого до температур, необходимых для последующей закалки.

Возможная техника высокочастотной закалки [1] связана с нагревом цилиндрических образцов токами Фуко при их погружении в соленоид конечной длины. В работе [2] анализировалась модель нагрева, где и соленоид и образец принимались бесконечными. В этом случае оценивалась толщина приповерхностного слоя, прогретого до температуры аустенитного превращения и далее закаленного (при охлаждении).

Однако если нагревающая система имеет конечную длину, то вблизи торцов соленоида электромагнитное поле рассеивается и плотность токов Фуко ослабевает. В настоящей работе представлена приближенная модель для оценки этого эффекта и соответственно падения уровня температуры в образце вблизи торцов при нагреве. Предлагаются три способа компенсации такого падения, и с помощью математического эксперимента оцениваются их возможности.

1. Температурное поле в конечном образце длины L и радиуса R, погруженном в конечный соленоид радиуса $a > R$, описывается решением аксиально-симметричной краевой задачи:

$$\frac{1}{r}\frac{1}{\partial r}\left(r\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+Q(r,z,t)= = c(u)\gamma(u)\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=0;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0}=0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=\pm L}=0;\quad u|_{t=0}=u_0,$$

где $u(r,z,t)$ — температура в данной точке, а λ, c, γ — калориметрические коэффициенты.

Здесь краевые условия соответствуют тому, что среднее время нагрева образца относительно мало и потоком тепла вовне можно пренебречь по сравнению с потоком, порожденным внутренним источником Q.

Физические параметры модели (λ, c, ρ) берутся такие же, как в работе [2], тепловые источники имеют индукционное происхождение: $Q = 0.12\sigma|W|^2$, где σ — удельная проводимость образца, W — амплитуда гармонически меняющегося во времени электрического поля, порождаемого соленоидом.

При алгоритмически определенной величине Q температурное поле рассчитывается методом переменных направлений [3].

Электрическое поле W определяется уравнениями Максвелла (без учета токов смещения в образце и токов проводимости вне его) с условиями сопряжения на границах и условиями ограниченности при $r \to 0$ и $r \to \infty$. Коэффициенты этих уравнений зависят от температуры u, однако, как следует из [2], для заданных характеристик материала можно без значительной потери точности при расчете температурных полей ограничиться «локально-стационарным» приближением уравнений Максвелла, где тем-

пература рассматривается как параметр. С другой стороны, воспользовавшись приближением хорошо проводящего образца: $W|_{z=R-0} \to 0$ при $\lambda \to \infty$, можно исключить W при $r > R$; тогда условия сопряжения заменяются граничными условиями:

$$\frac{1}{\mu(u)}\left(\frac{W}{r}+\frac{\partial W}{\partial r}\right)\bigg|_{r=R} = \left(\frac{E_0}{r}+\frac{\partial E_0}{\partial r}\right)\bigg|_{r=R},$$

$$\frac{1}{\mu(u)}\frac{\partial W}{\partial z}\bigg|_{z=\pm L} = \frac{\partial E_0}{\partial z}\bigg|_{z=\pm L}.$$

Здесь $E_0(r,z)$ — амплитуда электрического поля соленоида, связанная с амплитудой магнитного поля уравнениями Максвелла. Амплитуда магнитного поля находится путем интегрирования поля одного витка:

$$\mathbf{H_0} = \{H_{0r}, 0, H_{0z}\} = \int\limits_{-L_s}^{L_s} \mathbf{h}(r, z-\xi)d\xi,$$

где $\mathbf{h}(r, z-\xi)$ — магнитное поле витка с током (в сечении $x=\xi$). Величина h выражается явно [4] через эллиптические интегралы:

$$h_r = \frac{I}{2\pi}\frac{z}{r\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left(-K+\frac{a^2+r^2+z^2}{(a-r)^2+z^2}E\right),$$

$$h_z = \frac{I}{2\pi}\frac{z}{\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left(K+\frac{a^2-r^2-z^2}{(a-r)^2+z^2}E\right)$$

и может быть посчитана точно. Здесь K, E — эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода, I — сила тока в витке.

Поле W внутри образца описывается краевой задачей для уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial W}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2}-\left(i\sigma\nu\omega+\dfrac{1}{r^2}\right)W=0, \\ \left(\dfrac{W}{a}+\dfrac{\partial W}{\partial r}\right)\bigg|_{r=R}=f_R, \\ \dfrac{\partial W}{\partial z}\bigg|_{z=L}=f_L, \\ \dfrac{\partial W}{\partial z}\bigg|_{z=-L}=f_{-L}, \\ W|_{r=R}=0, \\ |W|<\infty. \end{cases} \tag{1}$$

Для этой задачи определено явное представление в виде суммы двух фурье-разложений, которыми мы и пользуемся в расчетах.

Расчет облегчается тем, что при больших значениях параметра $\sigma\mu\omega$ возможно использование асимптотических формул для вычисления собственных функций и соответственно величины $Q(r,z,t)$.

Рассмотренный выше алгоритм позволяет провести расчет температурного поля в любой точке образца. Решающим критерием для оценки результата мы считаем толщину слоя, прогретого до и выше температуры $\mathrm{Ac_3}$. Для бесконечного цилиндра эта величина постоянна, для цилиндра конечной длины она зависит от степени удаленности от торцов и принимает наименьшие (нулевые) значения вблизи них. Наличие границы $r = r_{\mathrm{Ac_3}}(z)$, определенной неявным образом уравнением $\Delta_A(r,z) = \mathrm{Ac_3}$, задает рабочую область при нагреве, в которой только и может произойти закалка слоя при последующем (достаточно быстром) охлаждении.

2. С помощью прямого математического эксперимента можно оценить краевые эффекты в зависимости от геометрических и силовых параметров установки.

Распределение плотности тепловых источников вдоль образца при $L = L_s$ и $I(\xi) = I_0 = \mathrm{const}$ (рис. 1) показывает, что вблизи торцов плотность источников значительно снижается (более чем в два раза). Это приводит к уменьшению вблизи торцов толщины слоя, прогретого до температуры аустенитных превращений ($T = \mathrm{Ac_3} = 790\,°\mathrm{C}$) и соответственно к увеличению хрупкости деталей при закалке.

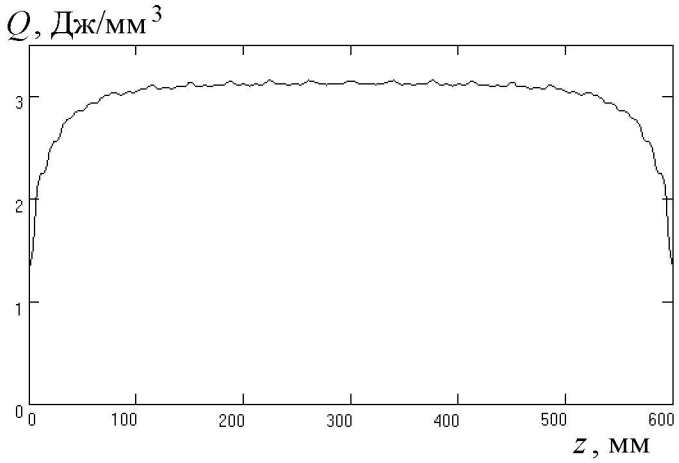

Рис. 1. Зависимость плотности тепловых источников от координаты z на поверхности образца для обычного соленоида

При проведении математических экспериментов рассматривалось три способа уменьшения толщины непрогретого слоя.

1. Удлинение соленоида такое, чтобы его длина несколько превосходила характерную длину образца ($L_s > L$), без изменения распределения тока по длине индуктора. В этом случае управляющим параметром оказывается длина соленоида L_s (рис. 2).

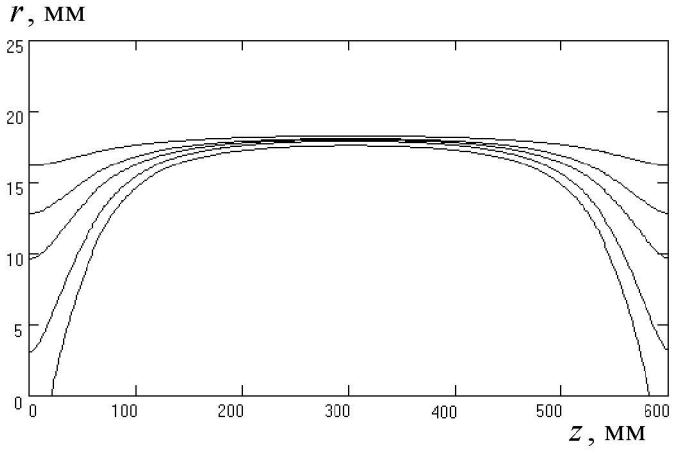

Рис. 2. Зависимость толщины слоя, прогретого до и выше температуры $\mathbf{Ac_3}$, от координаты z при разных значениях длины соленоида L_s и параметров дополнительных энергетических затрат K (сверху вниз): $2L_s = 600$ мм и $K = 0$; 620 мм и 3.3%; 660 мм и 10%; 700 мм и 16%; 800 мм и 33%

2. Увеличение силы тока во всем индукторе, что приводит к увеличению напряженности магнитного поля соленоида. При этом управляющим параметром является сила тока в индукторе (рис. 3).

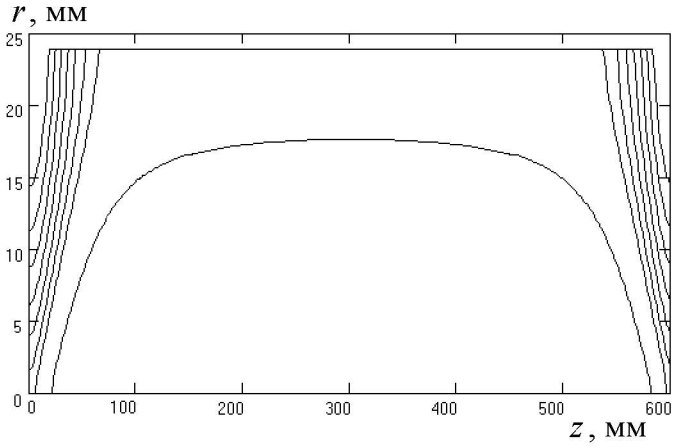

Рис. 3. Зависимость толщины слоя, прогретого до и выше температуры $\mathbf{Ac_3}$, от координаты z при разных значениях линейной плотности тока I во всем соленоиде (длина соленоида 600 мм) и параметров дополнительных энергетических затрат K (сверху вниз): $I = 165$ А/мм и $K = 0$; 174 А/мм и 5.5%; 177 А/мм и 7.3%; 180 А/мм и 9%; 183 А/мм и 11%; 186 А/мм и 13%; 192 А/мм и 16%; 195 А/мм и 18%

3. Увеличение числа витков на краях соленоида, в результате чего возрастает плотность тока в соленоиде на единицу длины. В этом случае управляющими параметрами служат длина дополнительных индукторов на концах соленоида и сила тока в них. Однако численный эксперимент показал, что при таком способе борьбы с краевым эффектом для достижения определенной толщины прогретого слоя требуются энергетические затраты, которые более чем на порядок выше, чем при втором способе (увеличение силы тока во всем соленоиде).

Метод удлинения соленоида приводит к тому, что участок, где происходит падение напряженности поля, отодвигается от торцов образца, в результате чего толщина закаленного слоя на торцах увеличивается и становится примерно такой же, как в середине. Метод же увеличения силы тока во всем соленоиде обеспечивает прогрев до температуры $\mathbf{Ac_3}$ практически всего образца (при достижении приемлемых значений толщины прогретого слоя вблизи торцов).

Для оценки эффективности методов использовался критерий минимизации энергетических затрат, необходимых для уменьшения краевого эффекта. Оценочным параметром служило отношение потребляемой мощности, необходимой для уменьшения краевого эффекта (P), к мощности, потребляемой обычным соленоидом (P_0): $K = \Delta P/P_0 = (P - P_0)/P_0$.

По этому критерию несколько более выгодным оказывается первый способ — удлинение соленоида. Второй способ требует несколько больших энергозатрат, но при его использовании происходит более сильный нагрев образца вблизи оси, что может привести как к увеличению закаленного слоя при охлаждении, так и к его уменьшению (вследствие того, что закалка происходит при достаточно быстром охлаждении, чему может препятствовать поток тепла из центра образца). В этой связи возникает проблема разработки математической модели процесса охлаждения. Анализ этой проблемы с использованием полученных результатов является объектом дальнейших исследований.

Результаты проведенного математического эксперимента и разработанной методики позволяют определить зависимость толщины подготовленного к закалке слоя от параметров модели для индуктора конечной длины и оценить различные методы устранения краевых эффектов.

Авторы статьи выражают признательность проф. В.Д. Кальнеру за полезные обсуждения.

Литература

1. *Вологдин В.П.* Поверхностная закалка индукционным способом. Л.; М.: Металлургиздат, 1939.
2. *Гласко В.Б., Кулик Н.И., Шкляров И.Н.* // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и киберн. 1978. № 1. С. 36.
3. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
4. *Смайт В.Р.* Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954.

Поступила в редакцию
19.01.01