

АСТРОНОМИЯ

УДК 517.958

НЕПЛОСКИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ТОКОВОЙ ШТАНГОЙ В ГРАВИТАЦИОННОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ ЗЕМЛИ

В. И. Денисов, В. Б. Пинц

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

E-mail: denisov@srd.sinp.msu.ru

Найдено точное решение нелинейных уравнений, описывающих движение космического аппарата по неплоской траектории под действием амперовых сил и сил гравитационного поля

В качестве двигателя малой тяги для космических аппаратов предложено использовать электродинамическое устройство с токовой штангой [1, 2]. Это устройство представляет собой жесткий линейный проводник с током, замыкание которого осуществляется через ионосферу с помощью специальных концевых плазменных контакторов. В результате взаимодействия тока в проводнике с дипольным магнитным полем Земли возникает сила Ампера, создающая силу тяги для космического аппарата. Величиной и направлением амперовой силы в этом случае легко управлять, изменяя силу тока и ориентацию проводника в пространстве по любому заданному закону.

Векторное уравнение движения космического аппарата в рассматриваемом случае принимает вид

$$M_1 \ddot{\mathbf{R}} = -\frac{GM_1 M_2 \mathbf{R}}{R^3} + \frac{L}{c} [\mathbf{I} \times \mathbf{B}], \quad (1)$$

где G — постоянная тяготения, M_1 — масса космического аппарата, M_2 — масса Земли, L — длина проводника с током, $\mathbf{I}$ — вектор тока в проводнике, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор космического аппарата относительно центра Земли.

Так как магнитное поле Земли с большой точностью является дипольным, то $\mathbf{B} = [3\mathbf{R}(\mathbf{m}\mathbf{R}) - R^2 \mathbf{m}]/R^5$, где $\mathbf{m}$ — вектор магнитного дипольного момента.

Как показали оценки [2], предложенное устройство является перспективным средством для осуществления различных маневров легких космических аппаратов на низких околоземных орбитах. Поэтому возникает задача получения и исследования тех частных случаев, в которых уравнение движения космического аппарата (1) под действием силы Ампера имеет точное решение. Эти решения позволяют составить общее представление о характере изменений траектории полета, вносимых действием силы Ампера. Кроме того, они имеют и прикладное значение, так как при разработке и отладке программ численного интегрирования

уравнений движения космического аппарата дают возможность исследовать вопросы устойчивости и сходимости выбранного алгоритма.

Рассмотрим частный случай управления токовой штангой, который позволяет получить точное решение уравнения (1), описывающее движение космического аппарата по неплоской траектории. Для этого запишем уравнение (1) в сферической системе координат. Полагая, что вектор магнитного дипольного момента Земли направлен против оси z , и вводя обозначение $k = |\mathbf{m}|L/(M_1 c)$, получим

$$\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta = -\frac{GM_2}{R^2} + \frac{kI_\varphi}{R^3} \sin \theta, \quad (2)$$

$$R\ddot{\theta} + 2R\dot{\theta} - R\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{2kI_\varphi}{R^3} \cos \theta,$$

$$\frac{1}{R \sin \theta} [R^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta] \dot{\varphi} = -\frac{k(I_r \sin \theta - 2I_\theta \cos \theta)}{R^3}.$$

В общем случае, при произвольном законе управления вектором тока $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\varphi, \theta)$, решение этой системы нелинейных дифференциальных уравнений неизвестно. Однако при выборе некоторых частных законов управления током можно найти точные решения этой системы уравнений.

Пусть $I_r = I_\theta = 0$. Тогда из последнего уравнения системы (2) следует

$$\dot{\varphi} = \frac{C_0}{R^2 \sin^2 \theta}, \quad (3)$$

где C_0 — постоянная интегрирования.

Умножая уравнение (1) скалярно на вектор скорости $\mathbf{v}$, получим

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{v^2}{2} - \frac{GM_2}{R} \right] = \frac{kI_\varphi}{R^3} [\dot{R} \sin \theta - 2R\dot{\theta} \cos \theta].$$

Выбирая $I_\varphi = I_0 \sin^3 \theta$, можно добиться того, что правая часть этого равенства будет представлять со-

бой полную производную по времени. В результате будем иметь:

$$\dot{R}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \frac{kI_0}{R^2} \sin^4 \theta - \frac{2GM_2}{R} = C_2. \quad (4)$$

В этом случае из второго уравнения системы (2) получим

$$R^4 \dot{\theta}^2 + \frac{C_0^2}{\sin^2 \theta} + kI_0 \sin^4 \theta = C_1. \quad (5)$$

Комбинируя уравнения (3) и (4), выразим φ в виде функции от θ :

$$\varphi = \varphi_0 \pm C_0 \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin \theta \sqrt{C_1 \sin^2 \theta - C_0^2 - kI_0 \sin^6 \theta}}. \quad (6)$$

Этот интеграл выражается через эллиптические функции.

Используя (3) и (5), уравнение (4) приведем к известной в небесной механике [3] форме:

$$\dot{R}^2 + \frac{C_1}{R^2} - \frac{2GM_2}{R} = C_2.$$

Запишем его решение в параметрическом виде для случая финитного движения ($C_2 < 0$):

$$R = R_0[1 - \varepsilon \cos \xi], \quad t = T_0[\xi - \varepsilon \sin \xi], \quad (7)$$

где введены обозначения $\varepsilon^2 = 1 + C_1 C_2 / (GM_2)^2 < 1$, $R_0 = -GM_2 / C_2$, $T_0^2 = R_0^3 / (GM_2)$ и условия при $t = 0$ выбраны в перицентре траектории.

Переходя в уравнении (5) от производной по времени к производной по параметру ξ и используя выражения (7), найдем связь параметра ξ с углом θ :

$$\xi = 2 \arctg \left\{ \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{tg} \left[\frac{R_0^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{2T_0} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta \sin \theta}{\sqrt{C_1 \sin^2 \theta - C_0^2 - kI_0 \sin^6 \theta}} \right] \right\}. \quad (8)$$

Соотношения (6)–(8) дают уравнение траектории и определяют закон движения космического аппарата

по этой траектории. Вычисление кручения кривой $\kappa = (\mathbf{R}'[\mathbf{R}''\mathbf{R}'''])/[\mathbf{R}'\mathbf{R}'']^2$, проведенное с использованием компьютерной системы Reduce, показало, что в рассматриваемом случае $\kappa \neq 0$. Поэтому найденное нами точное решение уравнения (1) описывает неплоскую траекторию движения космического аппарата с токовой штангой в гравитационном и магнитном полях Земли.

Интересным частным случаем неплоского движения космического аппарата под действием амперовой силы в гравитационном поле Земли является движение по траектории, лежащей на поверхности конуса $\theta = \theta_0 = \text{const}$, вершина которого находится в центре Земли. Действительно, как следует из уравнений (2)–(4), если в начальный момент времени $t = 0$ поместить космический аппарат в точку с координатами $R = R_0$, $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ и сообщить ему начальную скорость $\dot{R}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = C_0 / (R_0^2 \sin^2 \theta_0)$, то при выполнении условия $kI_\varphi = C_0^2 / (2 \sin^3 \theta_0)$ его закон движения примет вид

$$\theta = \theta_0,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{2C_0 T_0}{R_0^2 \sqrt{1-\varepsilon^2} \sin^2 \theta_0} \arctg \left\{ \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right\},$$

$R = R(\xi)$ и $t = t(\xi)$ даются выражениями (7), а $C_1 = 3C_0^2 / (2 \sin^2 \theta_0)$.

Такое движение представляет определенный интерес, так как совершается только над одним полушарием и космический аппарат не пересекает при этом плоскость экватора. Таким образом, действие силы Ампера на космический аппарат с токовой штангой существенно изменяет вид его траектории в гравитационном поле Земли.

Литература

1. Денисов В.И., Пинчук В.Б. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 4. С. 69 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 4. P. 85).
2. Денисов В.И., Денисова И.П., Пинчук В.Б. // ДАН. 2000. 374, № 1. С. 10.
3. Петкевич В.В. Теоретическая механика. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
09.02.01