ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.01

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В СИЛЬНЫХ ВНЕШНИХ ПОЛЯХ В $1+1$ ИЗМЕРЕНИЯХ

О. Ф. Дорофеев, В. Р. Халилов

(*кафедра общей физики и молекулярной электроники; кафедра теоретической физики*)

E-mail: khalilov@thc.phys.msu.su

Изучено влияние внешнего сверхсильного магнитного поля на спектр энергий электрона в сильном кулоновском поле и величину критического заряда ядра. Проблема сведена к решению задачи в ограниченном кулоновском поле в $1+1$ измерениях. Показано, что уравнение Дирака в $1+1$ измерениях во внешнем скалярном кулоновском поле имеет невырожденное зарядово-самосопряженное решение с нулевой энергией, вследствие чего вакуум модели должен приобретать фермионный заряд $\pm 1/2$.

В сверхсильном магнитном поле $B > B_{\text{cr}} \equiv \equiv m^2/|e|$ электрон в перпендикулярной полю плоскости локализован в области с линейным размером порядка $a = \sqrt{2/|eB|}$, что меньше комптоновской длины волны электрона [1]. «Вымораживание» двух степеней свободы позволяет свести некоторые задачи КЭД$_{3+1}$ к задачам КЭД$_{1+1}$.

Мы найдем точные решения и спектр энергий уравнения Дирака во внешнем поле кулоновского типа $U(x) = -q/(|x|+a)$ в $1+1$ измерениях. Нахождение спектра энергий электрона во внешнем поле, описываемом векторным потенциалом

$$A^0(x,a) = -\frac{Ze_0}{|x|+a}, \quad A^1(x,a) = 0, \quad a > 0, \tag{1}$$

эквивалентно решению задачи о рождении электрон-позитронных пар из вакуума кулоновским полем (см. [2–4]) в сверхсильном магнитном поле в КЭД$_{3+1}$ (в рамках КЭД$_{3+1}$ эта задача была решена И.М. Терновым [1]*)). Если дираковская частица взаимодействует с внешним скалярным полем $U(x) = -q/|x|$ в $1+1$ измерениях, то в модели существуют фермионные состояния с нулевой энергией [5] и полуцелым фермионным числом $\pm 1/2$. Теоретически это явление впервые было обнаружено в симметричной относительно операции зарядового сопряжения квантовой теории размерности $1+1$, которая описывает безмассовое дираковское поле, взаимодействующее с внешним топологическим солитонным полем («кинком») [6].

*) И.М. Тернов внес решающий вклад в развитие метода точных решений уравнений релятивистской квантовой механики во внешних полях, что позволило адекватно интерпретировать целый ряд новых явлений квантовой механики.

В КЭД$_{3+1}$ задача для спектра энергий электрона в кулоновском поле ядра с $Ze^2 \geqslant 1$ имеет физический смысл, только если ядро, создающее кулоновский потенциал, не точечное [2], т.е. рассматривается потенциал, обрезанный на расстоянии R. В таком потенциале с ростом Z в области $Z > 137$ уровни энергии электрона становятся отрицательными и опускаются до границы нижнего континуума $-m$. В поле точечного ядра и сверхсильном магнитном поле потенциал ядра обрезается в направлении магнитного поля на расстояниях $\sim a$ с $a = \sqrt{2/|eB|}$, что с учетом замечания о вымораживании степеней свободы электрона и позволяет свести задачу о движении электрона во внешних магнитном и кулоновском полях в $3+1$ измерениях к задаче об электроне в поле (1) в $1+1$ измерениях.

В $1+1$ измерениях имеются только две γ-матрицы Дирака. При решении уравнения Дирака в поле, описываемом векторным потенциалом (1), удобно использовать представление

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1 \tag{2}$$

(эквивалентно для матриц β, α_1: $\beta = \sigma_3$, $\alpha_1 = -\sigma_2$). Гамильтониан уравнения Дирака в поле (1) (магнитное поле в $3+1$ измерениях направлено по x) имеет вид

$$H_D(Z) = \alpha_1 P_1 + \beta m + eA^0 \equiv i\sigma_2 \partial_x + \sigma_3 m + eA^0. \tag{3}$$

Решение уравнения Дирака с гамильтонианом (3) во внешнем поле (1) ищем в виде

$$\Psi(t,x) = \exp(-iEt)\Psi(x), \tag{4}$$

Эта и следующие две статьи (В.В. Терновского, А.М. Хапаева и А.И. Студеникина) посвящаются памяти профессора И.М. Тернова в связи с 80-летием со дня его рождения (11 ноября 1921 г.).

причем

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \tag{5}$$

— двухкомпонентная функция (спинор).

В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d\psi_1}{dx} - \left(E + m + \frac{Z\alpha}{|x|+a}\right)\psi_2 = 0, \\ &\frac{d\psi_2}{dx} + \left(E - m + \frac{Z\alpha}{|x|+a}\right)\psi_1 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Решения ищем отдельно в областях $x > 0$ и $x < 0$.

Введем обозначения $b_+ = \sqrt{m+E}$, $b_- = \sqrt{m-E}$, $\lambda = b_+ b_- \equiv \sqrt{m^2 - E^2}$ и перейдем к переменной $z = 2\lambda(|x|+a)$. Решение системы (6) в области $x > 0$, убывающие при $x \to \infty$, выражаются через функции Уиттекера [7]

$$W_{\beta-1/2,i\rho}(z)/\sqrt{z}, W_{\beta+1/2,i\rho}(z)/\sqrt{z}$$

с $\beta = EZ\alpha/\lambda$, $\rho = Z\alpha$:

$$\begin{aligned} &\psi_1 = (AW_{\beta-1/2,i\rho}(z) + BW_{\beta+1/2,i\rho}(z))/b_-\sqrt{z}, \\ &\psi_2 = -(AW_{\beta-1/2,i\rho}(z) - BW_{\beta+1/2,i\rho}(z))/b_+\sqrt{z}, \end{aligned} \tag{7}$$

а связь между постоянными A и B определяется соотношением $A\lambda = BZ\alpha m$. Волновые функции в области $-\infty < x < 0$ можно получить аналогично. Решения можно классифицировать по четности: 1) четные ψ_1, нечетные ψ_2; 2) четные ψ_2, нечетные ψ_1.

Уравнения для определения спектра энергий фермиона в поле (1), очевидно, можно получить из условий $\psi_2(0) = 0$ для случая 1 и $\psi_1(0) = 0$ для случая 2. Трансцендентное уравнение, неявно определяющее спектр энергий фермиона с учетом конечных размеров ядра, имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \ln(2\lambda a) + \arg\Gamma(-\beta + i\rho) - (1/2)\,\mathrm{arctg}(\rho/\beta) - \\ - \arg\Gamma(2i\rho) = \pi(n - 1/2), \end{aligned} \tag{8}$$

где n — целое число, нумерующее уровни энергии. Низшему уровню энергии соответствует значение $n = 0$. Критический заряд существенно зависит от параметра a. Так, решив уравнение (8) численно для $am = 0.1$ ($B \sim 10^2 B_{\rm cr}$), мы получили $Z_{\rm cr} \approx 93$. С уменьшением a (т. е. с увеличением B) $Z_{\rm cr}$ также уменьшается, однако минимальное значение параметра a, разумеется, ограничено величиной радиуса ядра. Состояние электрона с $E = -m$ является связанным, т. е. электрон на границе нижнего континуума остается локализованным в пространстве.

Спектры энергий фермионов и антифермионов оказываются симметричными, если массивные фермионы взаимодействуют с внешним скалярным полем кулоновского типа $U(x) = -q/(|x| + a)$. Здесь параметр a, хотя и является параметром обрезания, но не имеет смысла «магнитной длины». Уравнение Дирака в таком поле можно получить из системы (6), если изменить знак перед последним членом второго уравнения и заменить $Z\alpha$ на q, однако лучше использовать представление

$$\gamma^0 = \beta = \sigma_1, \quad \gamma^1 = i\sigma_3, \quad \alpha_1 = \sigma_2. \tag{9}$$

В этом представлении стационарное уравнение Дирака во внешнем скалярном поле $U(x)$ приводится к виду

$$\begin{aligned} &\frac{d\psi_1}{dx} + \left(m - \frac{q}{|x|+a}\right)\psi_1 = E\psi_2, \\ -&\frac{d\psi_2}{dx} + \left(m - \frac{q}{|x|+a}\right)\psi_2 = E\psi_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения (10) приводятся к паре одномерных уравнений Шрёдингера для функций ψ_1 и ψ_2:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\psi_1}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{qm}{\lambda z} + \frac{q(1-q)}{z^2}\right)\psi_1 = 0, \\ &\frac{d^2\psi_2}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{qm}{\lambda z} - \frac{q(1+q)}{z^2}\right)\psi_2 = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $z = 2\lambda(|x| + a)$.

Решения (11) в области $x > 0$:

$$\psi_1(x) = AW_{g,q-1/2}(z), \quad \psi_2(x) = BW_{g,q+1/2}(z) \tag{12}$$

с $g = qm/\lambda$. Связь между постоянными A и B найдем, подставляя (12) в (10): $A(m - \lambda) = BE$. Волновые функции в области $-\infty < x < 0$ нетрудно построить, заметив, что уравнения (10) переходят друг в друга при преобразованиях: $x \to -x$, $\psi_1(x) \to \psi_2(-x)$, $\psi_2(x) \to -\psi_1(-x)$, $E \to -E$ или $x \to -x$, $\psi_1(x) \to -\psi_2(-x)$, $\psi_2(x) \to \psi_1(-x)$, $E \to -E$.

Интерес представляет случай $a = 0$. Уравнения для определения спектра энергий фермиона можно получить из условий $\psi_2(0) = 0$ или $\psi_1(0) = 0$, что в пределе $a \to 0$ приводит к уравнению

$$q - \frac{qm}{\lambda} = -n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ . \tag{13}$$

Дискретный спектр энергий фермиона во внешнем скалярном поле $U(x) = -q/|x|$ имеет вид

$$E_n^2 = m^2\left[1 - \frac{q^2}{(q+n)^2}\right] \equiv m^2\frac{2qn + n^2}{(q+n)^2}, \tag{14}$$

а соответствующее решение является изолированным. Энергия основного уровня ($n = 0$) равна нулю как для частицы, так и для античастицы.

Для решения с нулевой энергией коэффициент $B=0$ и функция (5) принимает вид (при положительных x):

$$\Psi_0(x)=W_{q,q-1/2}(2mx)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Решение (15) описывает изолированное зарядово-самосопряженное состояние. Действительно, в $(1+1)$ измерениях при представлении (9) в качестве матрицы зарядового сопряжения (в области $x>0$) можно использовать $C=\sigma_3$. В частности, для решения с нулевой энергией (15) легко проверить, что $\sigma_3\Psi_0=\Psi_0$.

Вторично-квантованное фермионное поле удобно охарактеризовать фермионным зарядом. Для определения оператора фермионного заряда Q вводится уровень Ферми E_F, разделяющий занятые и незанятые фермионные состояния (уровни, относящиеся к отрицательным энергиям, предполагаются заполненными), и проводится разложение операторов квантованного поля Дирака по операторам рождения и уничтожения в схеме вторичного квантования.

Если уровень энергии с $n=0$ при $Z<Z_{\rm cr}$ заполнен, то уровень Ферми E_F лежит выше основного электронного уровня. Раскладывая оператор поля Дирака по операторам рождения и уничтожения с использованием полного набора решений уравнения Дирака (3) с $Z=Z_{\rm cr}$, получаем

$$\begin{aligned}\hat\Psi(t,x)=\sum_{E_n^+>0}a_n\Psi_n(x)\exp(-iE_n^+t)+\\ +b_0^+\Psi_{-m}(x)\exp(imt)+\\ +\sum_{E_n^-<-m}b_n^+\Psi_n(x)\exp(-iE_n^-t).\end{aligned} \qquad (16)$$

Здесь через $\Psi_{-m}(x)$ обозначена функция связанного состояния электрона с энергией $E=-m$ при $Z=Z_{\rm cr}$. Заметим, что первая сумма не содержит оператора a_0.

Учитывая ортонормированность решений уравнения Дирака (3), нетрудно привести оператор «заряда» поля фермионов $Q=(1/2)\int[\Psi^\dagger(t,x),\Psi(t,x)]dx$ к виду $Q=1+\sum\limits_{n\neq 0}(a_n^+a_n-b_n^+b_n)$. Вакуумное состояние КЭД$_{1+1}$, определяемое как $a_n|0\rangle=b_n|0\rangle=0$, очевидно, обладает фермионным зарядом (числом) 1 как при $Z<Z_{\rm cr}$, так и при $Z>Z_{\rm cr}$.

При разложении операторов квантованного поля Дирака $\hat\Psi(t,x)$ по операторам рождения и уничтожения в задаче во внешнем скалярном поле следует учесть симметричность спектра энергий для частиц и античастиц и наличие изолированного зарядово-самосопряженного состояния с нулевой энергией. Тогда нетрудно показать, что вакуумное состояние этой модели обладает фермионным зарядом $Q=1/2$ или $-1/2$ в зависимости от того, занято или не занято состояние с $E=m$ при $q=0$. При переходе от $q=0$ к $q\neq 0$ вакуум модели приобретает заряд $Q=-1/2$, если уровень энергии с $E=m$ при $q=0$ не был заполнен, и $Q=1/2$, если этот уровень заполнен [5].

Литература

1. *Тернов И.М., Халилов В.Р.* // ЖЭТФ. 1981. **57**. С. 654.
2. *Pomeranchuk I., Smorodinsky Ya.* // J. Phys. USSR. 1945. **9**. P. 97.
3. *Герштейн С.С., Зельдович Я.Б.* // ЖЭТФ. 1969. **57**. С. 654.
4. *Зельдович Я.Б., Попов В.С.* // УФН. 1971. **105**. С. 403.
5. *Ho C.L., Khalilov V.R.* // Phys. Rev. 2000. **D63**. P. 027701.
6. *Jackiw R., Rebbi C.* // Phys. Rev. 1976. **D13**. P. 3398.
7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, ря ов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963.

Поступила в редакцию 05.03.01

УДК 538.3

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

В. В. Терновский, А. М. Хапаев

(*кафедра математики*)

E-mail: ternov@hotmail.com

Развивается теория индуцированного излучения, основы которой были заложены в работах И.М. Тернова. Построено аналитическое решение задачи о вынужденном излучении ансамбля заряженных частиц, взаимодействующих с переменными электромагнитными полями, которые локализованы в области, представляющей собой модель открытого резонатора.

Возможность реализации генераторов индуцированного синхротронного излучения электронов, движущихся в макроскопических электромагнитных полях (они получили название лазеров на свободных электронах), впервые была доказана И.М. Терновым на основе квантовой теории синхротронного излучения [1].

Однако эффект индуцированного излучения по