

Для решения с нулевой энергией коэффициент $B = 0$ и функция (5) принимает вид (при положительных x):

$$\Psi_0(x) = W_{q,q-1/2}(2mx) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Решение (15) описывает изолированное зарядово-самосопряженное состояние. Действительно, в (1+1) измерениях при представлении (9) в качестве матрицы зарядового сопряжения (в области $x > 0$) можно использовать $C = \sigma_3$. В частности, для решения с нулевой энергией (15) легко проверить, что $\sigma_3 \Psi_0 = \Psi_0$.

Вторично-квантованное фермионное поле удобно охарактеризовать фермионным зарядом. Для определения оператора фермионного заряда Q вводится уровень Ферми E_F , разделяющий занятые и незанятые фермионные состояния (уровни, относящиеся к отрицательным энергиям, предполагаются заполненными), и проводится разложение операторов квантованного поля Дирака по операторам рождения и уничтожения в схеме вторичного квантования.

Если уровень энергии с $n = 0$ при $Z < Z_{cr}$ заполнен, то уровень Ферми E_F лежит выше основного электронного уровня. Раскладывая оператор поля Дирака по операторам рождения и уничтожения с использованием полного набора решений уравнения Дирака (3) с $Z = Z_{cr}$, получаем

$$\hat{\Psi}(t, x) = \sum_{E_n^+ > 0} a_n \Psi_n(x) \exp(-iE_n^+ t) + b_0^+ \Psi_{-m}(x) \exp(imt) + \sum_{E_n^- < -m} b_n^+ \Psi_n(x) \exp(-iE_n^- t). \quad (16)$$

Здесь через $\Psi_{-m}(x)$ обозначена функция связанного состояния электрона с энергией $E = -m$ при

$Z = Z_{cr}$. Заметим, что первая сумма не содержит оператора a_0 .

Учитывая ортонормированность решений уравнения Дирака (3), нетрудно привести оператор «заряда» поля фермионов $Q = (1/2) \int [\Psi^\dagger(t, x), \Psi(t, x)] dx$ к виду $Q = 1 + \sum_{n \neq 0} (a_n^+ a_n - b_n^+ b_n)$. Вакуумное состо-

яние КД 1_{+1} , определяемое как $a_n |0\rangle = b_n |0\rangle = 0$, очевидно, обладает фермионным зарядом (числом) 1 как при $Z < Z_{cr}$, так и при $Z > Z_{cr}$.

При разложении операторов квантованного поля Дирака $\hat{\Psi}(t, x)$ по операторам рождения и уничтожения в задаче во внешнем скалярном поле следует учесть симметричность спектра энергий для частиц и античастиц и наличие изолированного зарядово-самосопряженного состояния с нулевой энергией. Тогда нетрудно показать, что вакуумное состояние этой модели обладает фермионным зарядом $Q = 1/2$ или $-1/2$ в зависимости от того, занято или не занято состояние с $E = m$ при $q = 0$. При переходе от $q = 0$ к $q \neq 0$ вакуум модели приобретает заряд $Q = -1/2$, если уровень энергии с $E = m$ при $q = 0$ не был заполнен, и $Q = 1/2$, если этот уровень заполнен [5].

Литература

1. Тернов И.М., Халилов В.Р. // ЖЭТФ. 1981. **57**. С. 654.
2. Poteranchuk I., Smorodinsky Ya. // J. Phys. USSR. 1945. **9**. Р. 97.
3. Герштейн С.С., Зельдович Я.Б. // ЖЭТФ. 1969. **57**. С. 654.
4. Зельдович Я.Б., Попов В.С. // УФН. 1971. **105**. С. 403.
5. Ho C.L., Khalilov V.R. // Phys. Rev. 2000. **D63**. Р. 027701.
6. Jackiw R., Rebbi C. // Phys. Rev. 1976. **D13**. Р. 3398.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963.

Поступила в редакцию
05.03.01

УДК 538.3

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

В. В. Терновский, А. М. Хапаев

(кафедра математики)

E-mail: ternov@hotmail.com

Развивается теория индуцированного излучения, основы которой были заложены в работах И.М. Тернова. Построено аналитическое решение задачи о вынужденном излучении ансамбля заряженных частиц, взаимодействующих с переменными электромагнитными полями, которые локализованы в области, представляющей собой модель открытого резонатора.

Возможность реализации генераторов индуцированного синхротронного излучения электронов, движущихся в макроскопических электромагнитных полях (они получили название лазеров на

свободных электронах), впервые была доказана И.М. Терновым на основе квантовой теории синхротронного излучения [1].

Однако эффект индуцированного излучения по

своей природе не является принципиально квантовым и возможен в классической системе. Поэтому метод точных решений [1] может быть применен к анализу индуцированного излучения релятивистских зарядов в различных конфигурациях электромагнитных полей. Предложенный И.М. Терновым путь решения задачи об индуцированном излучении ансамбля зарядов не потерял актуальности и в настоящее время. Мы наглядно проиллюстрируем существо данного метода, построив аналитическое решение задачи о вынужденном излучении ансамбля заряженных частиц, взаимодействующих с переменными полями, которые локализованы в некоторой области, являющейся моделью открытого резонатора.

1. Проблема Кеплера

Особенности аналитического решения данной задачи покажем на примере анализа энергетического состояния и динамики заряда в постоянном магнитном поле и в поле цилиндрически-симметричной плоской циркулярно-поляризованной волны. Начало работы в этом направлении было положено И.М. Терновым [1, 2]. Уравнения движения и баланса энергии электрона сводятся к системе параметрических уравнений [3, 4] для энергии γ и продольной координаты z (уравнения циклоиды, задача Кеплера)

$$\gamma = \cos \psi, \quad z = \Lambda \psi + \sin \psi,$$

где ψ — параметр, Λ — коэффициент отражения, γ , Λ , z , ψ безразмерны.

Дальнейший анализ энергетического состояния заряда в z -представлении сводится к исследованию зависимости параметра Λ от входных условий. Условие $\Lambda = 0$ приводит к функциональной связи $\gamma^2 + z^2 = 1$. Движение зарядов по z становится ограниченным: оно происходит в замкнутом пространстве по тороидальной поверхности, т.е. реализуется режим «захвата». Это наглядно показано на рис. 1. В остальных трех случаях: $\Lambda > 1$, $\Lambda = 1$, $\Lambda < 1$ можно определить максимальные и минимальные энергетические состояния. При $\Lambda < 1$ энергия $\gamma(z)$ становится многозначной функцией, что иллюстрируется на рис. 2. Два вращения соответствуют заданию двух частот: ω_0 — ларморовской частоты и ω — частоты волны. Основной задачей является определение границ изменения Λ в зависимости от входных параметров задачи β_0 , ω_0/ω и амплитуды поля волны ε . При $\Lambda = 1$ получаем уравнение типа $F = (\varepsilon, \omega_0/\omega, \beta_{x0}, \beta_{y0}) = 0$. На рис. 3 приведено изображение поверхности, описываемой функцией F в пространстве начальных импульсов β_{x0} , β_{y0} , ω_0/ω при $\varepsilon = 1$. При выборе параметров задачи, лежащих ниже построенной поверхности, движение происходит с отражением, выше — без отражения (обыкновенное циклоидальное изменение энергии).

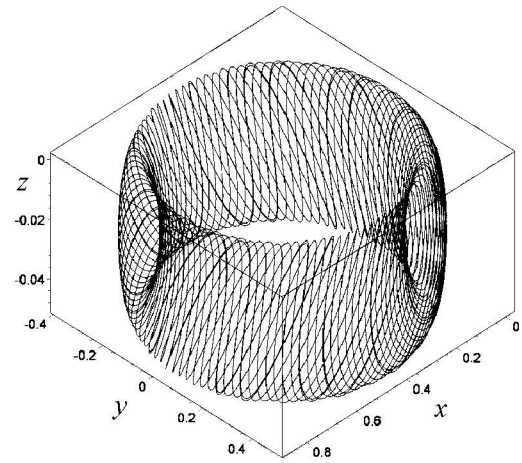


Рис. 1

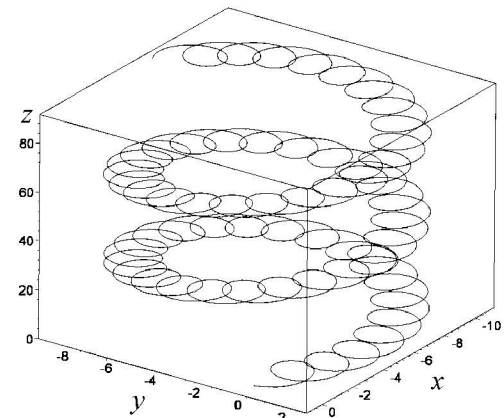


Рис. 2

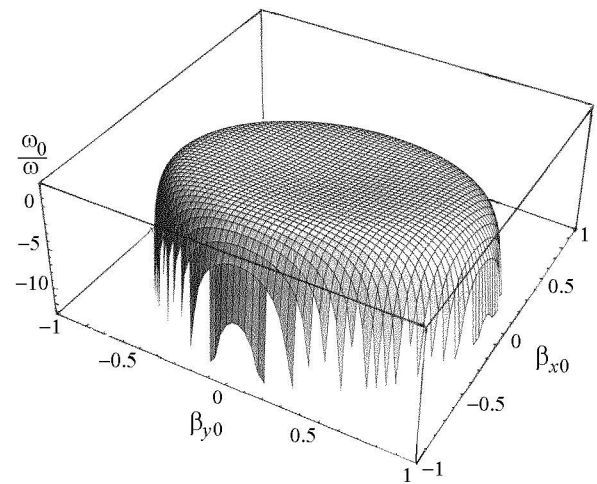


Рис. 3

2. Модель ансамбля нелинейных осцилляторов

Исходной для анализа является по-прежнему система уравнений движения и баланса энергии (система Максвелла–Лоренца)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -e'\gamma\mathbf{E} - \frac{e'}{c}[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{H}], \quad \dot{\gamma} = \frac{e'}{c^3}(\dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}'), \quad (1)$$

где точками обозначены производные по собственному времени τ , связанному с лабораторным временем t соотношением $dt/d\tau = \gamma$, а штрихом — производная по $\rho = t - z/c$.

Конфигурация поля задается следующими потенциалами:

$$\mathbf{A} = 2A_0 f(z) \sin(\omega z/c) [\cos(\psi)\mathbf{i} - \sin(\psi)\mathbf{j}],$$

$$\mathbf{A}_0 = \left(\frac{1}{2}yH_0\right) \mathbf{e}_1 - \left(\frac{1}{2}eH_0\right) \mathbf{j}, \quad (2)$$

где A_0, H_0 — амплитуды аксиально-симметричных полей стоячей электромагнитной волны и постоянного магнитного поля, $f(z)$ — зависимость амплитуды волны от длины области взаимодействия ансамбля зарядов с заданным внешним полем. Ведущее магнитное поле зависит от функции распределения $\chi(z)$, причем $\chi(0) = 1$, $\chi'(z) = \varepsilon\rho(z)$:

$$\mathbf{H} = H_0(H_x, H_y, H_z),$$

$$H_x = \frac{1}{2}x\chi(z), \quad H_y = \frac{1}{2}y\chi(z), \quad H_z = \chi(z). \quad (3)$$

Параметры ансамбля электронов (модель «крупной» частицы) задается входными условиями

$$x_n = r_0 \cos \varphi_{0n}, \quad y_0 = r_0 \sin \varphi_{0n},$$

$$v_{xn} = v_{-0} \sin \varphi_{0n}, \quad v_{y0} = -v_{-0} \sin \varphi_{0n}, \quad (4)$$

где x, y — координаты частицы, r_0 — ларморовский радиус, $\varphi_{0n} = 2\pi n/N$ — фаза частицы на «электронном кольце» (N — общее число зарядов).

3. Нелокальный функционал энергии

Система уравнений (1) после построения динамических интегралов [5] сводится в цилиндрических координатах к системе скалярных уравнений

$$\dot{r} = c\varepsilon A_x + \frac{1}{2}\varepsilon\omega_0\psi_1,$$

$$\dot{\theta} = \gamma - \frac{\omega_0}{\omega}\chi + \varepsilon\frac{c}{\omega r}A_y + \varepsilon^2\frac{\omega_0}{2r\omega}\psi_2, \quad \theta = t - \frac{\varphi}{\omega}, \quad (5)$$

$$\dot{\gamma} = \varepsilon\frac{\omega\omega_0}{c}r\chi A_x + \varepsilon^2\frac{\omega\omega_0}{2c^2}f\psi_3,$$

где $\psi_i (i = 1, 2, 3)$ — функции, задающие изменение амплитуды продольного магнитного поля (3).

Совокупность уравнений (5) и дисперсионное соотношение образуют полную систему уравнений, определяющих изменение энергии и координат заряда в циркулярно-поляризованной волне и стационарном магнитном поле, амплитуда которых зависит от $f(z)$ и $\chi(z)$. Поскольку аналитическое решение системы динамических уравнений (5) построить затруднительно, определяется асимптотическое

разложение $\gamma(z, f, \chi, \theta_0)$ по амплитуде волны ε до второго порядка включительно. В результате решения колебательных уравнений (5) получаем энергию заряда (нелинейного осциллятора) в виде функции $\theta_0 \in [0, 2\pi]$. Расчет γ не представляет самостоятельного интереса, поэтому приведем результат усреднения его по входной фазе θ_0 , т. е. эффективность взаимодействия ансамбля зарядов с полем плоской волны. Данный функционал обозначим $\bar{\gamma}$. При этом более удобным является линейно связанный с энергией функционал $u = \frac{(\bar{\gamma} - \gamma_0)}{(\gamma_0 - 1)}$. Функционал u имеет вид

$$u = \sigma_1 \int_0^z \chi f \sin p\alpha d\alpha + \sigma_3 \int_0^z \chi f \cos p\alpha d\alpha +$$

$$+ \sigma_2 \chi \left[\left(\int_0^z f \cos p\alpha d\alpha \right)^2 + \left(\int_0^z f \sin p\alpha d\alpha \right)^2 \right] +$$

$$+ \sigma_4 \chi \left[\left(\int_0^z f \cos p\alpha d\alpha \right) \left(\int_0^z f \alpha \sin p\alpha d\alpha \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\int_0^z f \sin p\alpha d\alpha \right) \left(\int_0^z f \alpha \cos p\alpha d\alpha \right) \right], \quad (6)$$

где $\sigma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ — коэффициенты, определяемые входными условиями (4) и параметрами задачи (2), (3).

4. Исследование функционала

При произвольных входных параметрах электронного ансамбля и высокочастотного электромагнитного поля исследование на экстремум функционала $u(z, f(z), \chi(z))$ представляется чрезвычайно сложной задачей. Все рассмотренные варианты имеют низкую эффективность взаимодействия. Абсолютная величина функционала оказалась пропорциональной ε^2 , если точно выполняется условие фазового синхронизма [3].

Пусть имеется погрешность во входных условиях, т. е. условие фазового синхронизма выполняется с точностью $\tilde{\varepsilon}$. Тогда дальнейший анализ функционала (6) будем проводить, применяя фурье-преобразование к функции $f(z) = 2 \sin(\omega z/c) f(z)$. В каждом из интервалов (6) расширим пределы интегрирования и сделаем четное продолжение функции $f(z)$ на выбранный интервал. В качестве пробной функции, с помощью которой оценивается функционал, выберем стоячую волну с постоянной амплитудой. Вычисление фурье-образов приводит функционал (6) к виду

$$u[z, f(z)] \simeq (\varepsilon/\tilde{\varepsilon})^2.$$

Величина функционала определяется отношением амплитуды поля волны и $\tilde{\varepsilon}$, длиной области взаимодействия и другими параметрами. Подбором

параметров можно добиться преобладания вынужденного излучения над поглощением, т. е. выбрать оптимальный режим взаимодействия.

Литература

1. Тернов И.М. // УФН. 1995. **4**. С. 429.
2. Тернов И.М., Михайлин В.В., Халилов В.Р. Синхротронное излучение и его применение. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.

3. Тернов И.М., Халилов В.Р., Пономарев И.В., Хапаев А.М. // Дифф. уравнения. 1985. **8**. С. 1926.
4. Володин Б.А., Хапаев А.М. // Матем. моделирование. 1989. **4**, № 2. С. 100.
5. Терновский В.В., Хапаев А.М. // Матем. моделирование. 1998. **10**, № 12. С. 96.

Поступила в редакцию
14.03.01

УДК 539.12.01

БЕТА-РАСПАД НЕЙТРОНА И АНОМАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ЛЕПТОНА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ: ОТ ПЕРВЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ДО СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ

А. И. Студеникин

(кафедра теоретической физики)

E-mail: studenik@srdlan.npi.msu.su

Обсуждаются две важные проблемы, возникшие в контексте исследований взаимодействий элементарных частиц во внешних электромагнитных полях. Первые результаты по бета-распаду нейтрона и аномальному магнитному моменту заряженных лептонов во внешнем поле были получены И.М. Терновым с сотрудниками в 1960-х гг., однако до сих пор эти две проблемы находятся в центре внимания исследователей. Приведен краткий обзор работ по этим вопросам. Новые результаты, полученные в последнее время, наглядно свидетельствуют об актуальности затронутых проблем.

1. Бета-распад нейтрона в магнитном поле

В середине 1960-х гг. по мере углубления исследований квантовоэлектродинамических процессов в электромагнитных полях с использованием метода точных решений было обращено внимание на возможность изменения под действием внешних полей характера протекания процессов, идущих по схеме слабых взаимодействий. Первым из слабых процессов в 1964–1965 гг. был исследован бета-распад нейтрона в магнитном поле [1, 2]. Диапазон рассмотренных напряженностей магнитных полей простирался до сверхвысоких значений $B \sim B_0 = m^2/e = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс. Следует особо отметить, что эти исследования были выполнены до обнаружения в 1967 г. пульсаров, в окрестности которых существуют такие гигантские поля. Несколькими годами позже основные результаты приоритетных работ [1, 2] по бета-распаду нейтрона в магнитном поле получили подтверждение в статьях [3, 4], хотя в них и отсутствовали ссылки на [1, 2]. Интерес к бета-распаду нейтрона $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$ в магнитном поле связан прежде всего с той существенной ролью, которую эта и протекающие в магнитном поле родственные ей реакции

$$\begin{aligned} \nu + n &\rightarrow p + e, & e + p &\rightarrow n + \nu, \\ e^+ + n &\rightarrow p + \bar{\nu}, & p &\rightarrow n + e^+ + \bar{\nu}, \end{aligned} \quad (1)$$

могут играть в остывании нейтронных звезд и в процессах, происходящих на ранних этапах эволюции Вселенной [5, 6]. Исследованные уже в первых работах [1, 2] по бета-распаду в магнитном поле особенности спектра электронов распада, асимметрия вылета нейтрино относительно направления вектора \mathbf{B} , зависимость вероятности от поляризации спина нейтрона, а также ее изменение под действием поля являются закономерностями, присущими и другим процессам (1). Наиболее полный обзор влияния электромагнитных полей на бета-распад и родственные ему процессы содержится в статье [7]. Отметим также, что во многом благодаря указанным выше особенностям бета-распада и процессы (1) до сих пор остаются в центре внимания исследователей [8–13].

В первом порядке теории возмущений в рамках $(V - A)$ -варианта универсального взаимодействия амплитуда распада нейтрона в магнитном поле представима в виде

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \{ \bar{\Psi}_p \gamma_\mu (1 + \alpha \gamma_5) \Psi_n \bar{\Psi}_e \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \Psi_{\bar{\nu}} \},$$

где G_F — константа Ферми, Ψ_n и $\Psi_{\bar{\nu}}$ — не зависящие от напряженности внешнего поля волновые функции нейтрона и антинейтрино, а Ψ_e и Ψ_p — релятивистские волновые функции электрона