

УДК 517.958 : 519.632.4

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ФИЗИКИ ЗАМАГНИЧЕННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ ВО ВНУТРЕННЕЙ ОБЛАСТИ

А. О. Чикилев, П. А. Крутицкий

(кафедра математики)

E-mail: chikilev@afrodita.phys.msu.ru

Рассмотрена смешанная задача для гармонических функций во внутренней многосвязной области. На некоторых кривых границы задано условие Дирихле, на остальных — условие с косой производной. Для нахождения решения получено однозначно разрешимое интегральное уравнение Фредгольма второго рода. В результате доказано существование единственного решения задачи в пространстве непрерывных функций.

1. Постановка задачи. Теорема единственности

Пусть D^{int} — открытая связная внутренняя область на плоскости $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R^2$. Граница области D^{int} состоит из простых гладких замкнутых кривых $\Gamma_1^1, \dots, \Gamma_{N_1}^1; \Gamma_1^2, \dots, \Gamma_{N_2}^2$, которые не имеют общих точек, где $N_1 \geq 1$ и $N_2 \geq 0$. Определим: $\Gamma^1 = \bigcup_{n=1}^{N_1} \Gamma_n^1$, $\Gamma^2 = \bigcup_{n=1}^{N_2} \Gamma_n^2$ и $\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2$. Через Ξ обозначим ту кривую контура Γ , которая охватывает все остальные. Таким образом, при некотором m выполнено равенство: либо $\Xi = \Gamma_m^1 \subset \Gamma^1$, либо $\Xi = \Gamma_m^2 \subset \Gamma^2$. Пусть \mathbf{n}_x — нормаль к Γ в точке $x \in \Gamma$, направленная в область D^{int} , а $\boldsymbol{\tau}_x$ — касательная к Γ тоже в точке x . Считаем, что $\boldsymbol{\tau}_x$ указывает положительное направление обхода области D^{int} по Γ , оставляющее D^{int} справа. Предполагаем, что Γ^1 состоит из ляпуновских кривых, т. е. $\Gamma^1 \in C^{1,\lambda}$ для некоторого $\lambda \in (0, 1]$, а $\Gamma^2 \in C^{2,0}$.

Рассмотрим полупроводниковую пленку, занимающую область D^{int} на плоскости и находящуюся в постоянном однородном магнитном поле. Пусть на части ее границы (Γ^1) задан электрический потенциал, а на другой (Γ^2) — нормальная компонента плотности тока [1]. Электрический потенциал в пленке — решение следующей задачи для уравнения Лапласа.

Внутренняя задача S^{int} . Найти гармоническую в области D^{int} функцию $u(\mathbf{x})$, непрерывную в замыкании $\overline{D^{\text{int}}}$, по граничным условиям

$$u(\mathbf{x})|_{\Gamma^1} = f_1(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_x} \Big|_{\Gamma^2} = f_2(\mathbf{x}), \quad \beta = \text{const}. \quad (2)$$

В граничном условии (2) требуется существование правильной косой производной [1], т. е. существование на Γ^2 равномерного по $\mathbf{x} \in \Gamma^2$ предела:

$\lim_{d \rightarrow +0} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_x} \right) u(\mathbf{x} + d\mathbf{n}_x) = f_2(\mathbf{x})$. Во внешней многосвязной области такая задача изучена в ра-

боте [7] при условии ограниченности решения на бесконечности. Если $N_2 = 0$, то S^{int} — внутренняя задача Дирихле, изучавшаяся ранее [2–5]. Внутренняя задача с косой производной ($N_2 = 0$) рассмотрена в работах [1, 6] и в задаче S^{int} исключена из рассмотрения. Так же как в [7], с помощью энергетических тождеств можно доказать теорему единственности.

Теорема 1. *Задача S^{int} имеет не более чем одно решение.*

2. Интегральное уравнение и теорема существования

Пусть далее: $f_1(\mathbf{x}) \in C^0(\Gamma^1)$, $f_2(\mathbf{x}) \in C^0(\Gamma^2)$. Введем обозначение: D_n^k — внутренняя открытая область, ограниченная кривой Γ_n^k ($n = 1, \dots, N_k$, $k = 1, 2$). Выберем и зафиксируем точку Y_n^k , лежащую в области D_n^k . Определим ($n = 1, \dots, N_k$, $k = 1, 2$)

$$\theta(\Gamma_n^k, \Xi) = \begin{cases} 1, & \Gamma_n^k \neq \Xi, \\ 0, & \Gamma_n^k = \Xi. \end{cases}$$

Введем функцию

$$\begin{aligned} w[\nu](\mathbf{x}) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^1} \nu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| d\mathbf{l}_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N_1} \theta(\Gamma_n^1, \Xi) \ln |\mathbf{x} - Y_n^1| \int_{\Gamma_n^1} \nu(y) d\mathbf{l}_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^2} \nu(y) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| d\mathbf{l}_y + \\ & + \sum_{n=1}^{N_2} \frac{\beta}{2\pi} \int_{\Gamma_n^2} \nu(y) (\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \theta(\Gamma_n^2, \Xi) \psi(\mathbf{x}, Y_n^2)) d\mathbf{l}_y, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\nu(\mathbf{y}) \in C^0(\Gamma)$, а $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — ядро углового потенциала [1, 6, 8]. Заметим, что первое слагаемое в (3) — потенциал двойного слоя [4] на Γ^1 ; второе — сумма точечных источников в точках $Y_n^1 \notin D^{\text{int}}$ ($n = 1, \dots, N_1$) (если $\Xi = \Gamma_m^1$ для некоторого номера m , то элемент суммы, отвечающий

номеру m , равен нулю); третье — логарифмический потенциал [4] на Γ^2 ; четвертое — сумма модифицированных угловых потенциалов [6] на $\Gamma_n^2 \neq \Xi$ ($n = 1, \dots, N_2$) и углового потенциала [1, 6, 8] на Ξ , если $\Xi = \Gamma_m^2$ для некоторого номера m .

Ядро углового потенциала $\psi(x, y)$ (см., напр., [7]) — многозначная гармоническая функция, сопряженная по Коши–Риману к функции $\ln|x - y|$, где $|x - y|$ — расстояние между точками x и y . Геометрически $\psi(x, y) + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — угол между вектором $x - y$ и осью абсцисс: $(\cos \psi(x, y), \sin \psi(x, y)) = \frac{x-y}{|x-y|}$.

Выбор ветвей функции $\psi(x, y)$ осуществим следующим образом. Если $y \in \Gamma_n^2$, а $x \in D_n^2$, то выберем и зафиксируем точку $y^n \in \Gamma_n^2$ ($n = 1, \dots, N_2$). Под $\psi(x, y)$ будем понимать любую фиксированную ветвь этой функции, которая непрерывно меняется по x в области D_n^2 и по y на $\Gamma_n^2 \setminus y^n$. Если $y \in \overline{D_n^2}$, а x лежит в области $R^2 \setminus \overline{D_n^2}$, то $\psi(x, y)$ — любая фиксированная ветвь этой функции, которая непрерывно меняется по y в $\overline{D_n^2}$ и по x в произвольной фиксированной односвязной области \tilde{D}_n^2 , вложенной в $R^2 \setminus \overline{D_n^2}$. В результате $w[\nu](x)$ — однозначная функция в D^{int} (см. [6, 7]).

Выберем и зафиксируем в области D^{int} некоторую произвольную точку $x^0 \in D^{\text{int}}$. Решение задачи S^{int} будем искать в виде

$$u[\nu](x) = w[\nu](x) + C[\nu],$$

$$C[\nu] = -w[\nu](x^0) + \int_{\Gamma} \nu(y) dl_y. \quad (4)$$

Функция $u[\nu](x)$, определенная в (4), удовлетворяет всем условиям задачи S^{int} , за исключением граничных (см. [7]). Подставляя функцию $u[\nu](x)$ в граничное условие (1), получим (см. [7]) интегральное уравнение

$$\frac{\nu(x)}{2} + A[\nu](x) = f_1(x), \quad (5)$$

$$A[\nu](x) = w[\nu](x) + C[\nu], \quad x \in \Gamma^1.$$

(Здесь $w[\nu](x)$ — прямое значение функции (3) на Γ^1 , константа $C[\nu]$ определена в (4).) Аналогично, для выполнения граничного условия (2) имеем:

$$(1 + \beta^2) \left(\frac{\nu(x)}{2} + A[\nu](x) \right) = f_2(x), \quad x \in \Gamma^2,$$

где

$$A[\nu](x) = \frac{1}{2\pi(1 + \beta^2)} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{N_1} \theta(\Gamma_n^1, \Xi) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_x} \right) \ln|x - Y_n^1| \int_{\Gamma_n^1} \nu(y) dl_y -$$

$$- \frac{1}{2\pi(1 + \beta^2)} \left(\int_{\Gamma^1} \nu(y) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} \ln|x - y| dl_y + \right.$$

$$\left. + \beta \int_{\Gamma^1} \nu(y) \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_x \partial \mathbf{n}_y} \ln|x - y| dl_y \right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^2} \nu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \ln|x - y| dl_y +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N_2} \theta(\Gamma_n^2, \Xi) \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_x} - \beta \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \right) \frac{\beta \ln|x - Y_n^2|}{2\pi(1 + \beta^2)} \int_{\Gamma_n^2} \nu(y) dl_y. \quad (6)$$

Ядро оператора $A[\nu](x)$ является полярным на Γ^1 и непрерывным на Γ^2 [4]. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $f_1(x) \in C^0(\Gamma^1)$ и $f_2(x) \in C^0(\Gamma^2)$. Если $\nu(x) \in C^0(\Gamma)$ — решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\frac{\nu(x)}{2} + A[\nu](x) = f(x), \quad x \in \Gamma,$$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \Gamma^1, \\ \frac{f_2(x)}{(1 + \beta^2)}, & x \in \Gamma^2, \end{cases} \quad (7)$$

где оператор $A[\nu](x)$ определен в (5) при $x \in \Gamma^1$ и в (6) при $x \in \Gamma^2$, то функция $u[\nu](x)$, заданная формулой (4), является решением задачи S^{int} .

Изучим уравнение (7).

Лемма 1. Уравнение (7) однозначно разрешимо в пространстве непрерывных функций для любой функции $f(x)$ из пространства непрерывных функций.

Доказательство. Предположим, что однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода (7) имеет нетривиальное решение $\nu^0(x) \in C^0(\Gamma)$. По теореме 2 функция $u[\nu^0](x)$ — решение однородной задачи S^{int} . Из теоремы 1 следует

$$u[\nu^0](x) \equiv 0, \quad x \in \overline{D^{\text{int}}}. \quad (8)$$

Рассмотрим функцию

$$u^*[\nu^0](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^1} \nu^0(y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_y} \ln|x - y| dl_y +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N_1} \theta(\Gamma_n^1, \Xi) \psi(x, Y_n^1) \int_{\Gamma_n^1} \nu^0(y) dl_y +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^2} \nu^0(y) \psi(x, y) dl_y - \quad (9)$$

$$- \frac{\beta}{2\pi} \sum_{n=1}^{N_2} \int_{\Gamma_n^2} \nu^0(y) (\ln|x - y| - \theta(\Gamma_n^2, \Xi) \ln|x - Y_n^2|) dl_y,$$

сопряженную к $u[\nu^0](x)$ по Коши–Риману [7]. Из тождества (8) и соотношений Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u^*}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial u^*}{\partial x_1}$$

получим

$$u^*[\nu^0](x) \equiv C = \text{const}, \quad x \in D^{\text{int}}. \quad (10)$$

Из выражения (9) видно, что функция $u^*[\nu^0](x)$ многозначна в D^{int} [7] и может быть однозначной только в том случае, если выполнены условия

$$\theta(\Gamma_k^1, \Xi) \int_{\Gamma_k^1} \nu^0(y) dl_y = 0, \quad \theta(\Gamma_n^2, \Xi) \int_{\Gamma_n^2} \nu^0(y) dl_y = 0, \quad (11)$$

где $k = 1, \dots, N_1$, а $n = 1, \dots, N_2$. Так как из (10) следует однозначность функции $u^*[\nu^0](x)$, то условия (11) выполнены. Условия (11) означают, что интеграл от плотности $\nu^0(y)$ по любой кривой из контура Γ , не совпадающей с кривой Ξ , равен нулю. Получим более полный результат. Запишем $u[\nu^0](x)$ из (4) в точке x^0 , учитывая вид константы $C[\nu^0]$ из (4): $u[\nu^0](x^0) = \int_{\Gamma} \nu^0(y) dl_y$. Используя (8) и (11), имеем:

$$\int_{\Gamma_n^1} \nu^0(y) dl_y = 0, \quad n = 1, \dots, N_1; \quad (12)$$

$$\int_{\Gamma_n^2} \nu^0(y) dl_y = 0, \quad n = 1, \dots, N_2.$$

Используя (12), можно показать, что функция $u^*[\nu^0](x)$ является непрерывной в $R^2 \setminus \Gamma^2$ и гармонической в $R^2 \setminus \Gamma$. Учитывая (10), получим, что функция $u^*[\nu^0](x)$ удовлетворяет во внутренней области D_n^1 , которая ограничена не совпадающей с Ξ кривой Γ_n^1 ($n = 1, \dots, N_1$), задаче Дирихле:

$$\Delta u^* = 0, \quad x \in D_n^1; \quad u^*|_{\Gamma_n^1} = C = \text{const}. \quad (13)$$

В том случае, если $\Xi = \Gamma_m^1$ (при некотором номере m), функция $u^*[\nu^0](x)$ удовлетворяет внешней задаче Дирихле в области $R^2 \setminus \overline{D_m^1}$:

$$\Delta u^* = 0, \quad x \in R^2 \setminus \overline{D_m^1}; \quad u^*|_{\Xi} = C; \quad (14)$$

$$u^* = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Выполнение условия на бесконечности вытекает из (12). Из единственности решения внутренней задачи Дирихле (13) и решения внешней задачи Дирихле (14) следует, что $u^*[\nu^0](x) \equiv C$ в $\overline{D_n^1}$ ($n = 1, \dots, N_1$) при $\Xi \neq \Gamma_n^1$ и $u^*[\nu^0](x) \equiv C$ в $R^2 \setminus \overline{D_m^1}$ при $\Xi = \Gamma_m^1$. Так как $u[\nu^0](x)$ связана с

$u^*[\nu^0](x)$ соотношениями Коши–Римана в $R^2 \setminus \Gamma$, то $u[\nu^0](x) \equiv C_n^1$ — некоторая константа в D_n^1 ($n = 1, \dots, N_1$) при $\Xi \neq \Gamma_n^1$ и $u[\nu^0](x) \equiv C_m^1$ — некоторая константа в $R^2 \setminus \overline{D_m^1}$ при $\Xi = \Gamma_m^1$.

Из условий (12) очевидно, что функция $u[\nu^0](x)$ в окрестности контура Γ^1 представляет собой сумму потенциала двойного слоя с некоторой гармонической функцией. Используя теорему о скачке потенциала двойного слоя [4, 5] и учитывая (8), получим $\nu^0(x) \equiv -C_n^1$ при $x \in \Gamma_n^1$ ($n = 1, \dots, N_1$). Из условий (12) следует $C_n^1 = 0$ при $n = 1, \dots, N_1$, и в результате:

$$\nu^0(x)|_{\Gamma^1} \equiv 0. \quad (15)$$

Если $\Gamma^2 = \emptyset$, то $\nu^0(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma$. Пусть далее $\Gamma^2 \neq \emptyset$. Из (6), (12) и (15) следует, что однородное уравнение (7) при $x \in \Gamma^2$ примет вид

$$\frac{\nu^0(x)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^2} \nu^0(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \ln|x-y| dl_y = 0, \quad x \in \Gamma^2. \quad (16)$$

Пусть $\Xi \subset \Gamma^1$, т.е. $\Xi \not\subset \Gamma^2$. Как показано в лемме 5 из работы [9], уравнение (16) имеет только тривиальное решение, значит, $\nu^0(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma$.

Пусть $\Xi \subset \Gamma^2$. Уравнение (16) получается при решении внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа с помощью потенциала простого слоя [10]. Из леммы 6 работы [10] следует, что если $\nu^0(x) \in C^0(\Gamma)$ — решение однородного уравнения (16), удовлетворяющее условию $\int_{\Gamma^2} \nu^0(y) dl_y = 0$, то $\nu^0(x) \equiv 0$ на Γ^2 . Так как условие $\int_{\Gamma^2} \nu^0(y) dl_y = 0$

выполнено в силу (12), то $\nu^0(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma$.

В результате у однородного уравнения (7) нет нетривиальных решений, и по альтернативе Фредгольма уравнение (7) является однозначно разрешимым для любой $f(x) \in C^0(\Gamma)$, что и требовалось доказать.

Из леммы 1 и теоремы 2 следует теорема существования для задачи S^{int} .

Теорема 3. Пусть $f_1(x) \in C^0(\Gamma^1)$ и $f_2(x) \in C^0(\Gamma^2)$. Тогда задача S^{int} имеет единственное решение, которое дается формулой (4), где $\nu(x) \in C^0(\Gamma)$ — решение однозначно разрешимого уравнения (7).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 99-01-01063).

Литература

1. Крутицкий П.А. // ЖВМ и МФ. 1991. **31**, № 1. С. 109.
2. Крутицкий П.А. // ЖВМ и МФ. 1997. **37**, № 1. С. 117.
3. Krutitskii P.A. // Z. Angew. Math. Mech. 1999. **79**, No. 9. P. 591.

4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
 5. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
 6. Крутицкий П.А., Чикилев А.О. // Дифф. уравнения. 2000. **36**, № 9. С. 1196.
 7. Чикилев А.О., Крутицкий П.А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ.

Астрон. 2001. № 2. С. 30 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 2. P. 31).
 8. Габов С.А. // Матем. сб. 1977. **103(145)**, № 4. С. 490.
 9. Крутицкий П.А. // Матем. заметки. 1996. **60**, № 1. С. 40.
 10. Крутицкий П.А. // ЖВМ и МФ. 1996. **36**, № 1. С. 136.

Поступила в редакцию
09.02.01

УДК 517.958:533.7

ДИССИПАТИВНЫЕ СЛАГАЕМЫЕ В КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ПОЛЕ ТЕЧЕНИЯ В УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Т. Г. Елизарова^{*)}, М. Е. Соколова

(кафедра математики)

E-mail: telizar@yahoo.com

Приведен общий вид квазигазодинамических уравнений и вид дополнительных диссипативных слагаемых в цилиндрической и декартовой системах координат. Продемонстрировано влияние дополнительной диссипации на параметры течения газа в ударной волне.

Проблема описания течений газа с помощью моделей, расширяющих возможности традиционных уравнений Навье–Стокса (НС), уже долгое время интересует исследователей. Одной из таких моделей является система квазигазодинамических (КГД) уравнений [1–4]. Эта система описывает поведение пространственно-временных средних — плотности, скорости и температуры, а не мгновенных пространственных средних, как в теории НС. КГД-уравнения отличаются от уравнений НС дополнительными дивергентными слагаемыми с параметром размерности времени в качестве коэффициента. Дополнительная диссипация, присутствующая в КГД-уравнениях, обеспечивает эффективность численных алгоритмов, построенных на их основе [1, 4, 5]. Представляется интересным изучение роли этой дополнительной диссипации на примере конкретных газодинамических течений. Отметим, что КГД-уравнения отличаются от других, близких по структуре систем, которые предлагались в работах [6, 7].

Течение газа описывается с помощью трех законов сохранения — массы, импульса и энергии, — которые могут быть представлены в индексном виде в обычных обозначениях как

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i J^i = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u^k) + \nabla_i J^i u^k + \nabla^k p = \nabla_i \Pi^{ik}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i \frac{J^i}{\rho} (E + p) + \nabla_i q^i = \nabla_i (\Pi^{ik} u_k). \quad (3)$$

Для замыкания системы (1)–(3) необходимо определить выражения для вектора плотности потока массы J^i , тензора вязких напряжений Π^{ik} и вектора теплового потока q^i .

Система уравнений НС описывает поведение мгновенных пространственных средних значений газодинамических параметров ρ , u^i , p . Соответствующие выражения для величин J_{NS}^i , Π_{NS}^{ik} и q_{NS}^i приведены, например, в работе [8]. Если для вычисления ρ , u^i и p использовать пространственно-временные средние, то систему уравнений (1)–(3) можно замкнуть двумя другими способами [2, 3]. Для идеального политропного газа такое замыкание имеет вид

$$J_{QGD}^i = \rho u^i - \tau (\nabla_j (\rho u^i u^j) + \nabla^i p), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{QGD}^{ik} = \Pi_{NS}^{ik} + \tau u^i (\rho u^j \nabla_j u^k + \nabla^k p) + \\ + \tau g^{ik} (u_j \nabla^j p + \gamma p \nabla_j u^j), \end{aligned} \quad (5)$$

$$q_{QGD}^i = -k \nabla^i T - \tau \rho u^i \left(u^j \nabla_j \varepsilon + p u_j \nabla^j \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) \quad (6)$$

и образует КГД-систему уравнений. Второй способ замыкания образует КГД-систему, справедливую для описания течений неидеальных газов и жидкостей.

В приведенных уравнениях ∇_i и ∇^i — ко- и контравариантные производные, g^{ij} — метриче-

^{*)} Институт Математического моделирования РАН.