4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
5. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
6. *Крутицкий П.А., Чикилев А.О.* // Дифф. уравнения. 2000. **36**, № 9. С. 1196.
7. *Чикилев А.О., Крутицкий П.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 2. С. 30 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 2. P. 31).
8. *Габов С.А.* // Матем. сб. 1977. **103(145)**, № 4. С. 490.
9. *Крутицкий П.А.* // Матем. заметки. 1996. **60**, № 1. С. 40.
10. *Крутицкий П.А.* // ЖВМ и МФ. 1996. **36**, № 1. С. 136.

Поступила в редакцию
09.02.01

УДК 517.958:533.7

ДИССИПАТИВНЫЕ СЛАГАЕМЫЕ В КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ПОЛЕ ТЕЧЕНИЯ В УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Т. Г. Елизарова*), М. Е. Соколова

(*кафедра математики*)

E-mail: telizar@yahoo.com

Приведен общий вид квазигазодинамических уравнений и вид дополнительных диссипативных слагаемых в цилиндрической и декартовой системах координат. Продемонстрировано влияние дополнительной диссипации на параметры течения газа в ударной волне.

Проблема описания течений газа с помощью моделей, расширяющих возможности традиционных уравнений Навье–Стокса (НС), уже долгое время интересует исследователей. Одной из таких моделей является система квазигазодинамических (КГД) уравнений [1–4]. Эта система описывает поведение пространственно-временных средних — плотности, скорости и температуры, а не мгновенных пространственных средних, как в теории НС. КГД-уравнения отличаются от уравнений НС дополнительными дивергентными слагаемыми с параметром размерности времени в качестве коэффициента. Дополнительная диссипация, присутствующая в КГД-уравнениях, обеспечивает эффективность численных алгоритмов, построенных на их основе [1, 4, 5]. Представляется интересным изучение роли этой дополнительной диссипации на примере конкретных газодинамических течений. Отметим, что КГД-уравнения отличаются от других, близких по структуре систем, которые предлагались в работах [6, 7].

Течение газа описывается с помощью трех законов сохранения — массы, импульса и энергии, — которые могут быть представлены в индексном виде в обычных обозначениях как

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla_i J^i = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, u^k) + \nabla_i J^i u^k + \nabla^k p = \nabla_i\, \Pi^{ik}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}E + \nabla_i \frac{J^i}{\rho}(E+p) + \nabla_i q^i = \nabla_i(\Pi^{ik} u_k). \tag{3}$$

Для замыкания системы (1)–(3) необходимо определить выражения для вектора плотности потока массы J^i, тензора вязких напряжений Π^{ik} и вектора теплового потока q^i.

Система уравнений НС описывает поведение мгновенных пространственных средних значений газодинамических параметров ρ, u^i, p. Соответствующие выражения для величин J^i_{NS}, Π^{ik}_{NS} и q^i_{NS} приведены, например, в работе [8]. Если для вычисления ρ, u^i и p использовать пространственно-временные средние, то систему уравнений (1)–(3) можно замкнуть двумя другими способами [2, 3]. Для идеального политропного газа такое замыкание имеет вид

$$J^i_{QGD} = \rho u^i - \tau(\nabla_j(\rho u^i u^j) + \nabla^i p), \tag{4}$$

$$\Pi^{ik}_{QGD} = \Pi^{ik}_{NS} + \tau u^i(\rho u^j \nabla_j u^k + \nabla^k p) + \tau g^{ik}(u_j \nabla^j p + \gamma p \nabla_j u^j), \tag{5}$$

$$q^i_{QGD} = -k\nabla^i T - \tau\rho u^i\left(u^j \nabla_j \varepsilon + p u_j \nabla^j\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) \tag{6}$$

и образует КГД-систему уравнений. Второй способ замыкания образует КГД-систему, справедливую для описания течений неидеальных газов и жидкостей.

В приведенных уравнениях ∇_i и ∇^i — ко- и контравариантные производные, g^{ij} — метриче-

*) Институт Математического моделирования РАН.

ский тензор, k — коэффициент теплопроводности, $\varepsilon = p/(\rho(\gamma-1))$ — удельная внутренняя энергия, γ — показатель адиабаты. В выражения (4)–(6) входит релаксационный параметр τ, который по порядку величины совпадает со средним временем свободного пробега молекул в газе и может быть связан с коэффициентом вязкости газа соотношением $\tau \sim \mu/p$, где μ — коэффициент динамической вязкости, μ/p — максвелловское время релаксации. Таким образом, в КГД-уравнениях выделяются два типа диссипативных слагаемых — обычная вязкость НС, пропорциональная коэффициенту вязкости μ, и дополнительная диссипация, пропорциональная коэффициенту τ.

Пользуясь правилами тензорного анализа [9], выпишем вид КГД-добавок $\tilde{J}^i_{QGD}$, $\tilde{q}^i_{QGD}$, $\tilde{\Pi}^{ik}_{QGD}$ к векторам плотности потока массы, тепловому потоку и тензору вязких напряжений в цилиндрической и декартовой системах координат.

В цилиндрической системе координат добавка к вектору плотности потока массы в физических координатах имеет вид

$$\tilde{J}_r^{\,QGD} = -\tau\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r^2) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho u_r u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_r u_z) + \frac{\partial p}{\partial r}\right],$$

$$\tilde{J}_\varphi^{\,QGD} = -\tau\left[\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_\varphi u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho u_\varphi^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_\varphi u_z) + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right],$$

$$\tilde{J}_z^{\,QGD} = -\tau\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_z u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho u_z u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z^2) + \frac{\partial p}{\partial z}\right].$$

Добавка к вектору теплового потока выражается следующим образом:

$$\tilde{q}_r^{QGD} = -\tau\rho u_r\frac{1}{\gamma-1}\times \left[u_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{p}{\rho}\right) + u_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}\right)\right] - \tau\rho u_r p\left[u_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right) + u_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_\varphi^{QGD} = -\tau\rho u_\varphi\frac{1}{\gamma-1}\times \left[u_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{p}{\rho}\right) + u_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}\right)\right] - \tau\rho u_\varphi p\left[u_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right) + u_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_z^{QGD} = -\tau\rho u_z\frac{1}{\gamma-1}\times \left[u_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{p}{\rho}\right) + u_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}\right)\right] - \tau\rho u_z p\left[u_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right) + u_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

Добавки к тензору вязких напряжений имеют достаточно громоздкий вид:

$$\tilde{\Pi}_{rr}^{QGD} = \tau\rho u_r\times \left[u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\right] + \tau\left[u_r\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r^3}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + u_z\frac{\partial p}{\partial z} + \gamma p\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right],$$

$$\tilde{\Pi}_{r\varphi}^{QGD} = \tau\rho u_r\tfrac{1}{r}\times \left[ru_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - r^2 u_r u_\varphi + u_\varphi\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + ru_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right],$$

$$\tilde{\Pi}_{rz}^{QGD} = \tau\rho u_r\left[u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right],$$

$$\tilde{\Pi}_{\varphi r}^{QGD} = \tau\rho u_\varphi\times \left[u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\right],$$

$$\tilde{\Pi}_{\varphi\varphi}^{QGD} = \tau\rho u_\varphi\frac{1}{r}\times \left[ru_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_\varphi\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_r u_\varphi + ru_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right] + \tau\left[u_r\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r^3}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + u_z\frac{\partial p}{\partial z} + \gamma p\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right],$$

$$\tilde{\Pi}_{\varphi z}^{QGD} = \tau\rho u_\varphi\left[u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right],$$

$$\tilde{\Pi}_{zr}^{QGD} = \tau\rho u_z\left[u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\right],$$

$$\tilde{\Pi}_{z\varphi}^{QGD} = \tau\rho u_z\frac{1}{r}\times \left[ru_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_\varphi\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_r u_\varphi + ru_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right],$$

$$\tilde{\Pi}_{zz}^{QGD} = \tau\rho u_z\left[u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right] + \tau\left[u_r\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + u_z\frac{\partial p}{\partial z} + \gamma p\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right].$$

Здесь

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Заметим, что, в отличие от тензора НС, этот дополнительный тензор несимметричен.

В декартовой системе координат приведенные выше выражения упрощаются: компонента добавки к вектору плотности потока массы имеет вид

$$\tilde{J}_x^{QGD} = = -\tau\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_x u_z) + \frac{\partial p}{\partial x}\right],$$

компонента вектора теплового потока:

$$\tilde{q}_x^{QGD} = -\tau\rho u_x \frac{1}{\gamma-1}\times \times\left[u_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) + u_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}\right) + u_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}\right)\right] - -\tau\rho u_x p\left[u_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right) + u_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\right) + u_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],$$

добавки к тензору вязких напряжений НС для диагональных элементов:

$$\tilde{\Pi}_{xx}^{QGD} = \tau\rho u_x\left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) + +\tau\left(2u_x\frac{\partial p}{\partial x} + u_y\frac{\partial p}{\partial y} + u_z\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \tau\gamma p\,\mathrm{div}\,\mathbf{u},$$

для недиагональных элементов:

$$\tilde{\Pi}_{xy}^{QGD} = \tau\rho u_x\left(u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right).$$

Путем циклической перестановки координат ($x \to y$, $y \to z$, $z \to x$ и $u_x \to u_y$, $u_y \to u_z$, $u_z \to u_x$) можно получить все остальные компоненты.

В приведенных формулах дивергенция вычисляется следующим образом:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Считая течение плоским, одномерным и параллельным оси Ox, рассмотрим плоскую неподвижную ударную волну, фронт которой перпендикулярен оси Ox и расположен в точке $x = 0$. Такое течение описывается системой КГД-уравнений (1)–(3) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u = \frac{\partial}{\partial x}\tau\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p),$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2 - (3-\gamma)\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) = = \frac{\partial}{\partial x}\tau\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^3) + 3u\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u(E+p) - \frac{\gamma \mathrm{Pr}^{-1}}{\gamma-1}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) - -(3-\gamma)\mu u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = = \frac{\partial}{\partial x}\tau\left(\frac{(E+p)}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\rho u^2}{\gamma-1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\rho} + +\rho u^2 p\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\tau\left(\rho u^3\frac{\partial u}{\partial x} + 2\rho u^2\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p u\frac{\partial u}{\partial x}\right). \quad (7)$$

Здесь в правую часть уравнений вынесены дополнительные диссипативные слагаемые, пропорциональные τ.

В качестве граничных условий на правой и левой границах используются условия Ренкина–Гюгонио. При проведении расчетов величины x, t, ρ, u, p, E обезразмерены путем деления на λ_1, λ_1/a_1, ρ_1, a_1, $\rho_1 a_1^2$, $\rho_1 a_1^2$ (здесь λ — средняя длина свободного пробега частиц в газе, $a = (\gamma p/\rho)^{1/2}$ — скорость звука). Зависимость коэффициента вязкости от температуры выбирается в виде $\mu \sim T^\omega$. Индексы 1 и 2 соответствуют значениям газодинамических величин слева и справа от фронта волны. Число Маха вычисляется как $\mathrm{Ma} = u/a$. Расчеты проведены с использованием явной по времени разностной схемы второго порядка точности по пространству. Решение начально-краевой задачи получено с помощью процедуры установления по времени. Использованный алгоритм аналогичен описанному в работе [4].

Для выяснения роли дополнительной вязкости была проведена серия расчетов, в которых параметр τ выбирался в интервале от 0 до $5\tau_0$, где $\tau_0 = \mu/p$. Уменьшение τ приводило к сокращению необходимого для устойчивости схемы шага по времени и увеличению числа итераций до сходимости. Для обеспечивания сходимости решения по сетке задача решалась на последовательности сгущающихся сеток с числом узлов по пространству 201, 601 и 1201.

На рис. 1–4 представлены профили газодинамических величин в ударной волне для случая $\mathrm{Ma}_1 = 5$, $\mathrm{Pr} = 2/3$, $\omega = 0.5$, $\gamma = 5/3$ (Pr — число Прандтля). Плотность, температура и скорость на рис. 1, 2 дополнительно нормированы с помощью соотношений $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$, $\tilde{T} = (T - T_1)/(T_2 - T_1)$, $\tilde{u} = (u - u_2)/(u_1 - u_2)$. Сплошная линия отвечает случаю $\tau = \tau_0$, пунктирная линия ($\tau = 0$) — случаю уравнений Навье–Стокса, штрих-пунктир — варианту, когда параметр релаксации постоянен и вычислен по значениям параметров газа за ударной волной ($\tau = \mu_2/p_2$). Линия с точками соответствует расчету этой задачи методом прямого численного моделирования Монте-Карло [4]. Эти данные можно считать эталонными.

Из графиков следует, что дополнительная диссипация практически не влияет на ширину ударной волны, которая вычисляется по максимальному наклону графика плотности и является одной из важных характеристик течения в ударной волне (рис. 1). Распределения скорости и вязких напряжений также слабо зависят от величины параметра τ (рис. 1, 3). Наиболее чувствительными к выбору

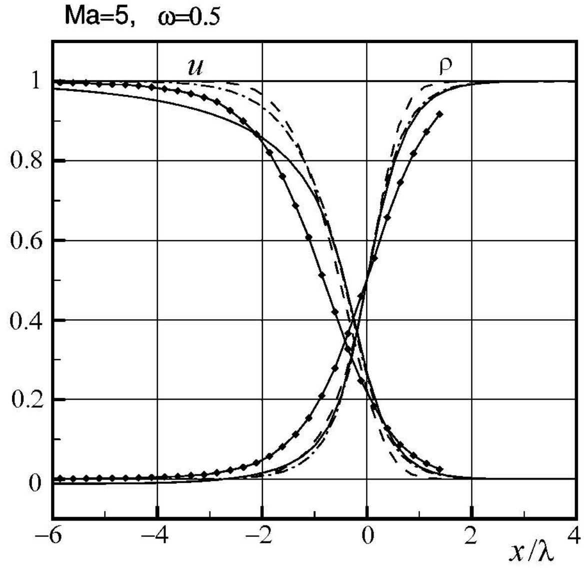

Рис. 1. Профили плотности и скорости

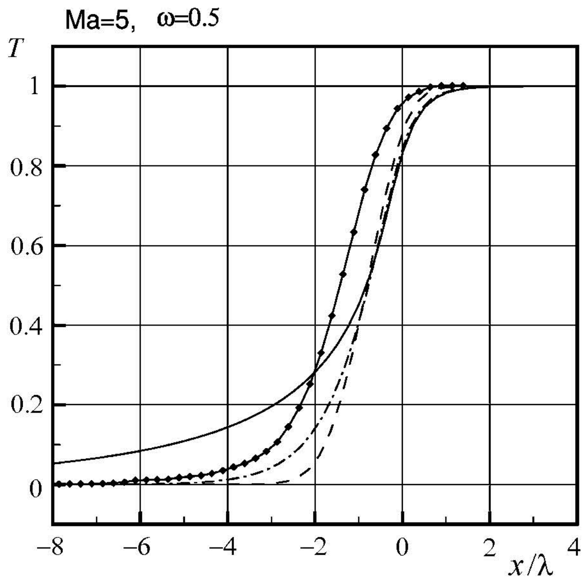

Рис. 2. Профили температуры

дополнительной вязкости оказываются температура (рис. 2) и тепловой поток (рис. 4*)): выбор $\tau = \tau_0$ приводит к заметному увеличению температуры газа и теплового потока перед ударной волной, где времена свободного пробега частиц относительно велики. Наиболее близкие результаты к эталонным значениям дает вариант с выбором параметра релаксации τ в соответствии с параметрами течения за ударной волной. Эти результаты для всех параметров течения по точности превосходят данные, полученные на основе уравнений Навье–Стокса.

Авторы выражают благодарность И.А. Граур за помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 01-01-00061).

*) Отметим, что в нашей работе [4] кривая для q, соответствующая уравнениям Навье–Стокса (фиг. 2), ошибочна.

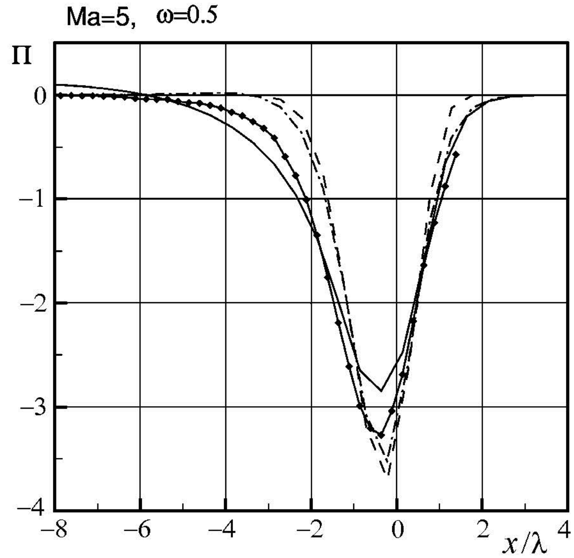

Рис. 3. Профили вязких напряжений

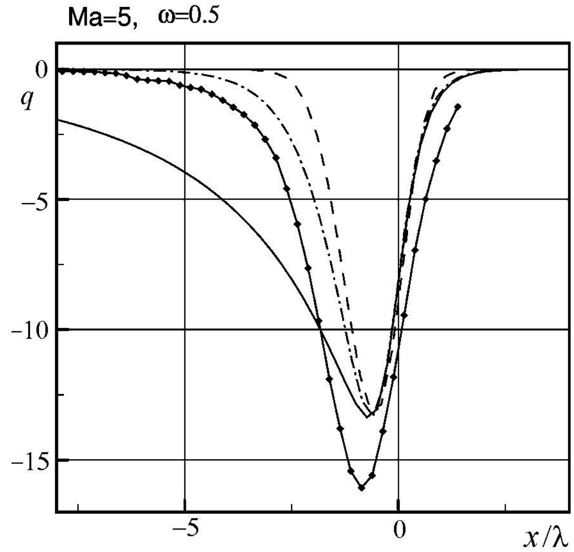

Рис. 4. Профили теплового потока

Литература

1. *Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н.* // ЖВМ и МФ. 1985. **25**, № 10. С. 1526.
2. *Шеретов Ю.В.* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Изд-во Тверского гос. ун-та, 1997. С. 127.
3. *Шеретов Ю.В.* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Изд-во Тверского гос. ун-та, 1999. С. 184.
4. *Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В.* // ЖВМ и МФ. 2001. **41**, № 2. С. 239.
5. *Четверушкин Б.Н.* Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
6. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых систем. М: ЯНУС, 1995.
7. *Алексеев Б.В.* // УФН. 2000. **170**, № 6. С. 649.
8. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
9. *Позняк Э.Г., Шикин Е.В.* Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.

Поступила в редакцию
14.02.01