2. *Локтев В.М., Шарапов С.Г.* // Физ. низ. температур. 2000. **26**, № 12. С. 1214.
3. *Локтев В.М.* // Физ. низ. температур. 2000. **26**, № 12. С. 1256.
4. *Николаев П.Н., Соколов А.И., Кузьмина О.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 6. С. 6 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 6. P. 6).
5. *Крупский И.Н., Прохватилов А.И., Фрейман Ю.А., Эренбург А.И.* // Физ. низ. температур. 1979. **5**, № 3. С. 271.
6. *Базаров И.П., Николаев П.Н.* Теория систем многих частиц. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Поступила в редакцию
23.05.01

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 538.56+535

ЭФФЕКТИВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ШУМА В МОНОХРОМАТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ГЕНЕРАЦИЯ СЖАТЫХ СОСТОЯНИЙ В СРЕДАХ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Ю. Е. Дьяков

(*кафедра общей физики и волновых процессов*)

Получено точное решение статистической задачи о прохождении смеси сигнала и шума через среду с кубической нелинейностью. Показано, что может иметь место эффективная (до 34%) перекачка энергии из шумовой компоненты излучения в монохроматическую. Найдено распределение степени сжатия шумового поля по длине нелинейной среды. Отмечена возможность сильного скачка сжатия в начале области распространения.

1. Распространение плоских шумовых волн в средах с кубической нелинейностью исследовалось в работах [1–4] на основе нелинейного уравнения для комплексной амплитуды A волны

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{1}{u}\frac{\partial A}{\partial t}+i\beta|A|^2A=0, \tag{1}$$

имеющего точное аналитическое решение

$$A(t,z)=A_0(\theta)\exp[-i\beta|A_0(\theta)|^2z], \quad z\geqslant 0. \tag{2}$$

Здесь u — групповая скорость, β — коэффициент нелинейности ($\mathrm{Im}\,\beta=0$), $\theta=t-z/u$, $A_0(t)=A(t,z=0)$ — комплексная амплитуда входного поля (см., напр., [1, с. 615]).

Нас будет интересовать случай, когда функция A_0 в выражении (2) описывает аддитивную смесь регулярной монохроматической компоненты (сигнала) и случайной узкополосной компоненты (шума): $A_0=\bar{A}_0+\tilde{A}_0$. Ранее было показано, что при этом в нелинейной среде генерируется поле $A=\bar{A}+\tilde{A}$, шумовая компонента которого $\tilde{A}$ может находиться в сжатом состоянии [2–4]. Однако из-за трудностей, возникающих при статистическом усреднении решения (2), эта задача рассматривалась методом возмущений, т. е. при малых A_0 и z.

2. В настоящей работе получены точные результаты, свободные от указанных ограничений. Это удалось сделать благодаря тому, что использовалась специальная модель флуктуаций $\tilde{A}_0$, соответствующая стационарному входному шуму с постоянной огибающей $\rho_0=\mathrm{const}$ и случайно меняющейся фазой $\varphi=\varphi(t)$, имеющей равномерное статистическое распределение

$$W(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\quad(-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi). \tag{3}$$

Такая модель приближенно описывает, например, шум на выходе генератора при большом превышении порога генерации ([1, с. 495]). Задавая входное поле в виде

$$E(t,z=0)=S_0\cos(\omega_0t+\varphi_0)+\rho_0\sin(\omega_0t-\varphi(t))$$

(S_0, ω_0, φ_0, ρ_0 — const), получим

$$\bar{A}_0=S_0\,\mathrm{e}^{i\varphi_0}=\mathrm{const},\quad \tilde{A}(t)=-i\rho_0\,\mathrm{e}^{-i\varphi(t)},$$

так что

$$|A_0(\theta)|^2=S_0^2+\rho_0^2-2\rho_0S_0\sin[\varphi(\theta)+\varphi_0].$$

В результате выражение (2) принимает вид

$$A(z,t)= \\ =C_0[S_0-i\rho_0\exp(-i(\varphi+\varphi_0))]\exp(ix\sin(\varphi+\varphi_0)), \tag{4}$$

где $\varphi=\varphi(\theta)$,

$$C_0=\exp\{i[\varphi_0-\beta z(S_0^2+\rho_0^2)]\}=\mathrm{const}\quad(|C_0|=1),$$

$x = 2\beta\rho_0 S_0 z = z/z_{\rm NL}$; $z_{\rm NL} = (2\beta\rho_0 S_0)^{-1}$ — характерная для данной задачи длина нелинейного взаимодействия.

3. Как следует из (3) и (4), среднее значение $\bar{A}$ от времени не зависит, т. е. $\bar{A}$ описывает монохроматическое (с частотой ω_0) излучение в нелинейной среде. Учитывая формулу

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp(-in\varphi+ix\sin\psi)d\psi = J_n(x),\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{5}$$

где $J_n(x)$ — функции Бесселя [5, с. 966], получим

$$\bar{A} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} AW(\varphi)d\varphi = C_0[S_0J_0(x) - i\rho_0 J_1(x)],$$

$$|\bar{A}|^2/\rho_0^2 = \eta_0 J_0^2(x) + J_1^2(x), \tag{6}$$

$$\langle\tilde{A}\tilde{A}^*\rangle/\rho_0^2 = \eta_0\alpha_1 + \alpha_2, \tag{7}$$

где $\eta_0 = S_0^2/\rho_0^2$ — отношение сигнал/шум на входе в нелинейную среду,

$$\alpha_1 = 1 - J_0^2(x), \quad \alpha_2 = 1 - J_1^2(x).$$

Согласно (6) и (7),

$$|\bar{A}|^2 \to 0, \quad \langle\tilde{A}\tilde{A}^*\rangle \to \langle A_0A_0^*\rangle = S_0^2+\rho_0^2 \quad (x\to\infty), \tag{8}$$

т. е. на больших расстояниях монохроматическая компонента поля исчезает, отдавая свою энергию шумовой компоненте. Переход к асимптотике (8) сопровождается пространственными осцилляциями интенсивности сигнала и шума (рис. 1). Интересно, что даже при малых входных сигналах отношение сигнал/шум

$$\eta(x) = \frac{|\bar{A}^2|}{\langle\tilde{A}\tilde{A}^*\rangle} = \frac{\eta_0 J_0^2(x) + J_1^2(x)}{\eta_0[1 - J_0^2(x)] + 1 - J_1^2(x)}$$

в нелинейной среде может достигать относительно больших величин:

$$\eta_{\max} = \eta(x_1) \approx \frac{J_1^2(x_1)}{1 - J_1^2(x_1)} \approx 0.52 \quad (\eta_0 \ll 1).$$

Здесь $x_1 \approx 1.84$ соответствует первому максимуму функции Бесселя $J_1(x)$ $(J_1(x_1) = J_{1\max} \approx \approx 0.582)$. Согласно (6), при $x = x_1$ в монохроматическое излучение перекачивается около 34% мощности входного шума:

$$|\bar{A}|^2/\rho_0^2 \approx J_1^2(x_1) \approx 0.34 \quad (\eta_0 \ll 1). \tag{9}$$

Для того чтобы этот эффект был достигнут, уменьшение S_0 должно быть скомпенсировано увеличением ρ_0 или z с таким расчетом, чтобы параметр $x = 2\beta\rho_0 S_0 z$ мог принять свое оптимальное

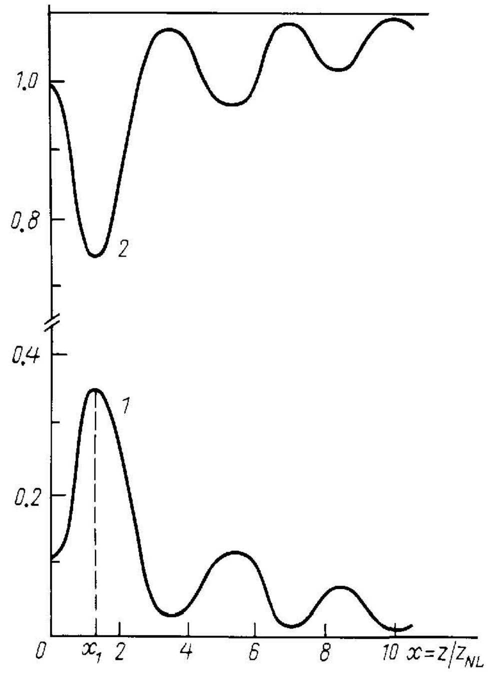

Рис. 1. Зависимость интенсивности сигнала (1) и шума (2) от глубины проникновения волны в кубическую среду при $\eta_0 = 0.1$

значение x_1. Слабый монохроматический сигнал на входе играет при этом роль малой затравки — его присутствие необходимо, хотя он и не влияет прямо на окончательный результат (9).

4. Определим теперь, в какой мере случайное поле $\tilde{A}$ является сжатым. Применим для описания $\tilde{A}$ математический аппарат, основанный на использовании параметра $\varkappa$ — степени сжатия [6]. Наиболее интересными параметрами сжатого поля являются отношение главных осей эллипса сжатия ($S_{\max}$) и максимальная величина коэффициента корреляции квадратурных компонент ($R_{\max}$). Как показано в работе [6], эти параметры следующим образом связаны с $\varkappa$:

$$S_{\max} = \sqrt{\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}}, \quad |R|_{\max} = \varkappa. \tag{10}$$

Величину $\varkappa$ можно выразить через статистические характеристики или квадратурных компонент, или комплексной амплитуды. В рассматриваемом случае проще применить последний способ и использовать соотношение [6]

$$\varkappa = \frac{|\langle\tilde{A}^2\rangle|}{\langle\tilde{A}\tilde{A}^*\rangle}, \quad 0 \leqslant \varkappa \leqslant 1. \tag{11}$$

Определив из (3)–(6) $\langle A^2\rangle$ и $\langle\tilde{A}^2\rangle = \langle A^2\rangle - (\bar{A})^2$ и подставив эти средние и выражение (7) в (11), получим степень сжатия в произвольной точке $0 < z < \infty$ нелинейной среды:

$$\varkappa = \frac{\sqrt{(\eta_0\beta_1 - \beta_3)^2 + 4\eta_0\beta_2^2}}{\eta_0\alpha_1 + \alpha_2} = \varkappa(x), \tag{12}$$

где

$$\beta_1 = J_0(2x) - J_0^2(x),$$
$$\beta_2 = J_1(2x) - J_0(x)J_1(x),$$
$$\beta_3 = J_2(2x) - J_1^2(x).$$

Из выражения (12) следует, что $\varkappa \to 0$ при $x \to 0$ и $x \to \infty$, т. е. шумовая компонента $\tilde{A}$ в областях $z \to 0$ и $z \to \infty$ стремится перейти в несжатое состояние. В промежуточной области величина $\varkappa$ осциллирует в интервале $0 < \varkappa < 1$, и поле $\tilde{A}$ является частично сжатым (рис. 2).

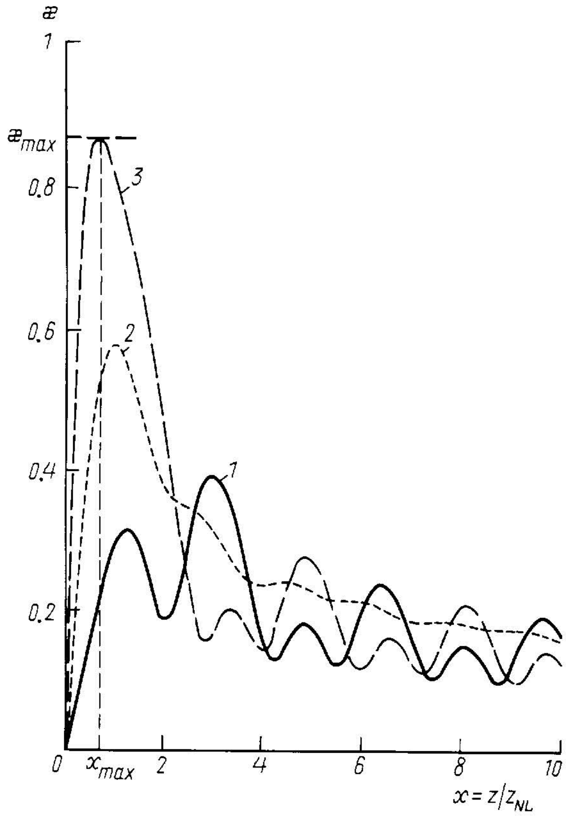

Рис. 2. Зависимость степени сжатия $\varkappa$ от глубины проникновения волны в кубическую среду при различных значениях отношения сигнал/шум на входе: $\eta_0 = 0.1$ (*1*), 1 (*2*) и 10 (*3*)

5. Обозначим первый максимум функции $\varkappa(x)$ через $\varkappa_{\max}$, а соответствующее ему значение x через $x_{\max}$. Расчет по формуле (12) показывает, что по мере возрастания параметра η_0 величина $\varkappa_{\max}$ возрастает и приближается к единице, а $x_{\max}$ неограниченно уменьшается:

$$\varkappa_{\max} \to 1, \quad x_{\max} \to 0, \quad \text{если} \quad \eta_0 \to \infty$$

(таблица и рис. 2).

η_0	$x_{\max}$	$\varkappa_{\max}$
0.1	3	0.4
1	1	0.58
10	0.3	0.87
100	0.28	0.98
1000	0.12	0.994
10000	0.08	0.999

Такой «скачок» сжатия от минимального до максимального возможного значения можно объяснить перемешиванием сигнала и шума в нелинейной среде, которое происходит тем интенсивнее, чем сильнее сигнал и чем меньше успевает проявиться стационарная фазовая самомодуляция, которая при больших x полностью подавляет сжатие.

6. В заключение отметим следующее.

Использованная в этой работе модель шумового поля с флуктуирующей фазой и фиксированной амплитудой является не только точно решаемой, но и интересной с точки зрения физических применений, поскольку в этом случае оказывается возможной сильная перекачка энергии из шума в монохроматический сигнал, а также генерация сжатого шума с произвольной степенью сжатия.

Для справедливости полученных выше результатов ширина $\Delta\omega_z$ частотного спектра волны $\tilde{A}$ должна быть достаточно малой, чтобы можно было пренебречь дисперсионными эффектами второго порядка. С учетом последних мы имели бы вместо (1) уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i\beta|A|^2 A - \frac{i}{2}k''\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 0, \tag{13}$$

где $k = k(\omega_0)$ — волновое число, $k'' = \frac{\partial^2 k(\omega_0)}{\partial \omega_0^2}$ [7, с. 366]. Сравнивая (1) и (13) и учитывая (2), получим условие, ограничивающее $\Delta\omega_z$:

$$\Delta\omega_z^2 \ll |\frac{2\beta}{k''}|(S_0^2 + \rho_0^2). \tag{14}$$

Теоретическая оценка полосы $\Delta\omega_z$ и вытекающие из (14) ограничения на длину z области распространения волн в нелинейной среде требуют специального рассмотрения, которое будет проведено в отдельной работе.

Литература

1. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.
2. *Ахманов С.А., Белинский А.В., Чиркин А.С.* // Новые физические принципы оптической обработки информации / Под ред. С.А. Ахманова, М.А. Воронцова. М.: Наука, 1990. С. 83.
3. *Чиркин А.С., Орлов А.А., Паращук Д.Ю.* // Квант. электроника. 1993. **20**, № 10. С. 999.
4. *Levenson M.D., Shelby R.M., Perlmutter S.H.* // Opt. Lett. 1985. **10**, No. 10. P. 514.
5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962.
6. *Дьяков Ю.Е.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 4. С. 55.
7. *Ахманов С.А.* // Нелинейная спектроскопия / Под ред. Н. Бломбергена. М.: Мир, 1979.

Поступила в редакцию
30.08.00