УДК 530.145

ВЕЙЛЕВСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЛОСКИМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

В. Е. Тарасов

(*НИИЯФ*)

E-mail: tarasov@theory.sinp.msu.ru

Рассматриваются правила вейлевского квантования, позволяющие получать квантовые аналоги уравнений движения для широкого класса динамических систем с плоским фазовым пространством.

Пусть система имеет n степеней свободы, а ее фазовое пространство является вещественным линейным пространством с размерностью $2n$. Наблюдаемыми являются функции $A(q,p)$, где $q,p \in R^n$. Обычно под квантованием понимают единую процедуру [1, 2], которая каждой классической наблюдаемой, т.е. вещественной функции $A(q,p)$, ставит в соответствие квантовую наблюдаемую, т.е. самосопряженный оператор $A(\hat{q},\hat{p})$. Сама функция $A(q,p)$ называется в этом случае символом оператора $A(\hat{q},\hat{p})$.

Примем, что эволюция классической системы на плоском фазовом пространстве R^{2n} описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}A(q,p)=\mathcal{L}\left(q,p,\frac{\partial}{\partial q},\frac{\partial}{\partial p}\right)A(q,p), \qquad (1)$$

где $A(q,p)$ — гладкая функция, определенная на пространстве R^{2n} и описывающая классическую наблюдаемую, а $\mathcal{L}\left(q,p,\frac{\partial}{\partial q},\frac{\partial}{\partial p}\right)$ — линейный дифференциальный оператор на пространстве гладких функций. Для получения уравнений эволюции квантовых систем надо задать правила, позволяющие квантовать классические уравнения движения (1) соответствующих дифференциальных операторов. Часто при задании этих правил стремятся записать уравнения движения в гамильтоновой форме [3–6], т.е. через скобку Пуассона с некоторой функцией Гамильтона. Однако в общем случае затруднительно определить, существует ли функция Гамильтона, является ли она единственной, если она существует, и найти ее явный вид, если она существует и единственна [7]. Поэтому квантование классических динамических систем общего вида, исходящее из уравнений движения, более удобно. В настоящей статье предлагаются правила вейлевского квантования уравнений эволюции классических динамических систем с плоским фазовым пространством.

1. Лиево-йордановы алгебры

Пусть множество наблюдаемых образует линейное пространство $\mathcal{M}_0$ над полем вещественных чисел R. Определим для наблюдаемых из $\mathcal{M}_0$ две билинейные операции умножения, обозначаемые символами $\cdot$ и $\circ$ и удовлетворяющие условиям:
1) $<\mathcal{M}_0,\cdot>$ — алгебра Ли:

$$A\cdot B=-B\cdot A, \quad (A\cdot B)\cdot C+(B\cdot C)\cdot A+(C\cdot A)\cdot B=0;$$

2) $<\mathcal{M}_0,\circ>$ — специальная алгебра Йордана:

$$A\circ B=B\circ A, \quad ((A\circ A)\circ B)\circ A=(A\circ A)\circ(B\circ A);$$

3) выполняются тождество дифференцирования йордановой алгебры и тождество связи ассоциаторов:

$$A\cdot(B\circ C)=(A\cdot B)\circ C+B\circ(A\cdot C),$$

$$(A\circ B)\circ C-A\circ(B\circ C)=\frac{\hbar^2}{4}\Big((A\cdot B)\cdot C-A\cdot(B\cdot C)\Big).$$

В этом случае говорят, что определена лиево-йорданова алгебра [8, 9]. Будем также полагать, что в $\mathcal{M}_0$ существует единица I такая, что $A\circ I=A$ и $A\cdot I=0$. Обозначим через $\mathcal{M}$ свободную лиево-йорданову алгебру над полем вещественных чисел R с единицей I и образующими q^k и p^k, где $k=1,\ldots,n$ и

$$q^k\cdot p^l=\delta_{kl}I, \quad q^k\cdot q^l=0, \quad p^k\cdot p^l=0. \qquad (2)$$

Для классических наблюдаемых $A(q,p)$ и $B(q,p)$ эти операции можно определить через скобки Пуассона в R^{2n} и обычное умножение функций:

$$\begin{aligned} A(q,p)\cdot B(q,p)&=\{A(q,p),B(q,p)\},\\ A(q,p)\circ B(q,p)&=A(q,p)B(q,p). \end{aligned} \qquad (3)$$

Для квантовых наблюдаемых $\hat{A}=A(\hat{q},\hat{p})$ и $\hat{B}=B(\hat{q},\hat{p})$ операции лиева и йорданова умножений определяются в виде коммутатора и антикоммутатора:

$$\hat{A}\cdot\hat{B}=\frac{1}{i\hbar}(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}), \quad \hat{A}\circ\hat{B}=\frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}). \qquad (4)$$

2. Алгебра умножений лиево-йордановой алгебры

Для всякого элемента $A \in \mathcal{M}$ определим два оператора левого $(L_A^{\pm})$ и два оператора правого $(R_A^{\pm})$ умножений, которые отображают $\mathcal{M}$ в себя по следующим правилам:

$$L_A^+ C = A \circ C, \quad L_A^- C = A \cdot C,$$

$$R_A^+ C = C \circ A, \quad R_A^- C = C \cdot A$$

для любых $C \in \mathcal{M}$. Эти отображения являются эндоморфизмами модуля алгебры $\mathcal{M}$. Подалгебра алгебры эндоморфизмов модуля $\mathcal{M}$, порождаемая всевозможными операторами $L_A^{\pm}$ и $R_A^{\pm}$, называется алгеброй умножений [10] лиево-йордановой алгебры $\mathcal{M}$ и обозначается $\mathcal{A}(\mathcal{M})$. Алгебры, порождаемые всеми операторами левых и всеми операторами правых умножений лиево-йордановой алгебры, совпадают с $\mathcal{A}(\mathcal{M})$, так как $L_A^{\pm} = \pm R_A^{\pm}$.

Тождества, которым удовлетворяют лиево-йордановы алгебры, приводят к соотношениям для операторов умножений. Для того чтобы их получить, необходимо использовать полную линеаризацию [10] тождеств, определяющих алгебру, и свойства коммутативности йорданова произведения и антикоммутативности лиева произведения.

Теорема 1. *Алгебра умножений $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ лиево-йордановой алгебры $\mathcal{M}$ определяется:*
1) лиевыми соотношениями

$$L_{A\cdot B}^- = L_A^- L_B^- - L_B^- L_A^-,$$

2) йордановыми соотношениями

$$L_{(A\circ B)\circ C}^+ + L_B^+ L_C^+ L_A^+ + L_A^+ L_C^+ L_B^+ = = L_{A\circ B}^+ L_C^+ + L_{B\circ C}^+ L_A^+ + L_{A\circ C}^+ L_B^+,$$

$$L_{(A\circ B)\circ C}^+ + L_B^+ L_C^+ L_A^+ + L_A^+ L_C^+ L_B^+ = = L_C^+ L_{A\circ B}^+ + L_B^+ L_{A\circ C}^+ + L_A^+ L_{B\circ C}^+,$$

$$L_C^+ L_{A\circ B}^+ + L_B^+ L_{A\circ C}^+ + L_A^+ L_{B\circ C}^+ = = L_{A\circ B}^+ L_C^+ + L_{B\circ C}^+ L_A^+ + L_{A\circ C}^+ L_B^+,$$

3) смешанными соотношениями

$$L_{A\cdot B}^+ = L_A^- L_B^+ - L_B^+ L_A^-, \quad L_{A\circ B}^- = L_A^+ L_B^- + L_B^+ L_A^-, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} L_{A\circ B}^+ &= L_A^+ L_B^+ - \frac{\hbar^2}{4} L_B^- L_A^-, \\ L_B^+ L_A^+ - L_A^+ L_B^+ &= -\frac{\hbar^2}{4} L_{A\cdot B}^-. \end{aligned} \tag{6}$$

Для алгебры классических наблюдаемых $\hbar = 0$.

Из этих соотношений вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. Если йорданова алгебра порождается множеством $X = \{x^k\}$, то соответствующая алгебра умножений порождается множеством операторов $\{L_{x^k}^+, L_{x^k\circ x^m}^+ |\ x^k, x^m \in X\}$.

Следствие 2. Если лиева алгебра порождается множеством $X = \{x^k\}$, то соответствующая алгебра умножений порождается множеством операторов $\{L_{x^k}^- |\ x^k \in X\}$.

Следствие 3. Если лиево-йорданова алгебра $\mathcal{M}$ порождается множеством $X = \{x^k\}$, то соответствующая алгебра умножений $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ порождается множеством операторов $\{L_{x^k}^+, L_{x^k}^- |\ x^k \in X\}$.

Отметим, что в последнем утверждении фигурирует множество операторов $\{L_{x^k}^+, L_{x^k}^- | x^k \in X\}$, а не $\{L_{x^k}^+, L_{x^k\circ x^l}^+, L_{x^k}^- | x^k, x^l \in X\}$, что обусловлено первым из соотношений (6).

Используя свойства образующих (2) и соотношения (5), легко доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Если лиево-йорданова алгебра $\mathcal{M}$ с единицей I порождается множеством $X = \{q^k, p^k, I |\ k = 1, \ldots, n\}$, элементы которого удовлетворяют соотношениям (2), то соответствующая алгебра умножений $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ порождается множеством операторов $\{L_{q^k}^{\pm}, L_{p^k}^{\pm}, L_I^{\pm} |\ q^k, p^k, I \in X\}$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям*

$$\begin{aligned} &[L_{q^k}^{\pm}, L_{p^l}^{\mp}] = \delta_{kl} L_I^+, \\ &[L_{q^k}^{\pm}, L_{q^l}^{\pm}] = [L_{q^k}^{\pm}, L_{p^l}^{\pm}] = [L_{p^k}^{\pm}, L_{p^l}^{\pm}] = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &[L_{q^k}^{\mp}, L_{q^l}^{\pm}] = [L_{p^k}^{\mp}, L_{p^l}^{\pm}] = 0, \\ &[L_{q^k}^{\pm}, L_I^{\mp}] = [L_{p^k}^{\pm}, L_I^{\mp}] = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что данные коммутационные соотношения для образующих $\{L_{q^k}^{\pm}, L_{p^k}^{\pm}, L_I^{\pm} |\ q^k, p^k, I \in X\}$ алгебры умножений $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ одинаковы для классических и квантовых наблюдаемых. Соотношения (7), (8) определяют алгебру Ли, порожденную операторами $L_{q^k}^{\pm}, L_{p^k}^{\pm}, L_I^{\pm}$. Из теоремы 2 вытекает очевидное утверждение: любой элемент $\mathcal{L}$ алгебры умножений $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ лиево-йордановой алгебры $\mathcal{M}$ может быть записан как полином $\mathcal{L}(L_{q^k}^{\pm}, L_{p^k}^{\pm}, L_I^{\pm})$ от операторов умножения $\{L_{q^k}^{\pm}, L_{p^k}^{\pm}, L_I^{\pm}\}$.

3. Вейлевское квантование

Соответствие между операторами $\hat{A} = A(\hat{q}, \hat{p})$ и символами $A(q,p)$ полностью определяется формулами, выражающими символы операторов $\hat{q}^k \hat{A}$, $\hat{A}\hat{q}^k$, $\hat{p}^k \hat{A}$, $\hat{A}\hat{p}^k$ через символ оператора $\hat{A}$. Говорят, что задано вейлевское квантование π_W, если эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \pi_W\left(\left(q^k + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p^k}\right) A(q,p)\right) &= \hat{q}^k \hat{A}, \\ \pi_W\left(\left(q^k - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p^k}\right) A(q,p)\right) &= \hat{A}\hat{q}^k, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\pi_W\left(\left(p^k - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q^k}\right)A(q,p)\right) = \hat{p}^k\hat{A},$$
$$\pi_W\left(\left(p^k + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q^k}\right)A(q,p)\right) = \hat{A}\hat{p}^k \quad (10)$$

для любых $\hat{A} = \pi_W(A(q,p))$. Доказательство справедливости этих формул содержится в работе [11].

Из определения (3) видно, что операторы L_A^+ и L_A^-, действующие на классические наблюдаемые, задаются формулами

$$L_A^+B(q,p) = A(q,p)B(q,p),$$
$$L_A^-B(q,p) = \{A(q,p), B(q,p)\}. \quad (11)$$

В силу определения (4) операторы $\hat{L}_A^+$ и $\hat{L}_A^-$ выражаются в виде

$$\hat{L}_A^+\hat{B} = \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}), \quad \hat{L}_A^-\hat{B} = \frac{1}{i\hbar}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}).$$

Используя операторы умножений $L_A^\pm$ и $\hat{L}_A^\pm$, перепишем формулы (9) и (10) в виде

$$\pi_W(L_{q^k}^\pm A) = \hat{L}_{q^k}^\pm\hat{A}, \quad \pi_W(L_{p^k}^\pm A) = \hat{L}_{p^k}^\pm\hat{A}.$$

Поскольку эти соотношения выполняются для любых $\hat{A} = \pi_W(A)$, то можно определить вейлевское квантование самих операторов умножения $L_{q^k}^\pm$ и $L_{p^k}^\pm$ следующим образом:

$$\pi_W(L_{q^k}^\pm) = \hat{L}_{q^k}^\pm, \quad \pi_W(L_{p^k}^\pm) = \hat{L}_{p^k}^\pm. \quad (12)$$

Эти соотношения задают вейлевское квантование порождающих операторов алгебры умножений лиево-йордановой алгебры классических наблюдаемых.

Из определения (11) для классических наблюдаемых получаем

$$L_{q^k}^+A(q,p) = q^kA(q,p), \quad L_{p^k}^+A(q,p) = p^kA(q,p) \quad (13)$$

и

$$L_{q^k}^-A(q,p) = \frac{\partial A(q,p)}{\partial p^k}, \quad L_{p^k}^-A(q,p) = -\frac{\partial A(q,p)}{\partial q^k}. \quad (14)$$

Выражения (13) и (14) позволяют рассматривать линейный полиномиальный дифференциальный оператор как элемент алгебры умножений лиево-йордановой алгебры классических наблюдаемых. В результате имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Линейный полиномиальный дифференциальный оператор*

$$\mathcal{L}\left(q,p,\frac{\partial}{\partial q},\frac{\partial}{\partial p}\right),$$

действующий на классические наблюдаемые $A(q,p) \in \mathcal{M}$, является элементом алгебры умножений $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ лиево-йордановой алгебры $\mathcal{M}$ классических наблюдаемых:

$$\mathcal{L}\left(q,p,\frac{\partial}{\partial q},\frac{\partial}{\partial p}\right) = \mathcal{L}(L_q^+, L_p^+, -L_p^-, L_q^-).$$

Доказательство очевидно из определения операторов $L_{q^k}^\pm$ и $L_{p^k}^\pm$, заданных в (13) и (14).

В силу (12) и коммутационных соотношений (7), (8) вейлевское квантование π_W дифференциальному оператору $\mathcal{L}\left(q,p,\frac{\partial}{\partial q},\frac{\partial}{\partial p}\right)$ на функциональном пространстве сопоставляет оператор $\mathcal{L}\left(\hat{L}_q^+, \hat{L}_p^+, -\hat{L}_p^-, \hat{L}_q^-\right)$, действующий в операторном пространстве. Таким образом, вейлевское квантование дифференциальных уравнений с полиномиальными операторами [12], описывающих эволюцию наблюдаемых динамической системы (1), определяется формулой

$$\pi_W\left(\mathcal{L}\left(q,p,\frac{\partial}{\partial q},\frac{\partial}{\partial p}\right)\right) = \mathcal{L}\left(\hat{L}_q^+, \hat{L}_p^+, -\hat{L}_p^-, \hat{L}_q^-\right).$$

Поскольку коммутационные соотношения для операторов $L_{q^k}^\pm$, $L_{p^k}^\pm$ и $\hat{L}_{q^k}^\pm$, $\hat{L}_{p^k}^\pm$ совпадают, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *При вейлевском квантовании упорядочение образующих операторов в операторе $\mathcal{L}\left(\hat{L}_q^+, \hat{L}_p^+, -\hat{L}_p^-, \hat{L}_q^-\right)$ однозначно определяется упорядочением в операторе $\mathcal{L}\left(L_q^+, L_p^+, -L_p^-, L_q^-\right)$.*

Соответствие между полиномиальными дифференциальными операторами и элементами алгебры умножений лиево-йордановой алгебры классических наблюдаемых можно продолжить до соответствия между операторами более общего вида и элементами некоторой (нормированной инволютивной) алгебры умножений [12].

4. Квантование системы типа Лоренца

Рассмотрим уравнение эволюции классической наблюдаемой $A_t(q,p)$ для классической диссипативной системы типа Лоренца [13], имеющее вид

$$\frac{d}{dt}A_t(q,p) = (-\sigma q_1 + \sigma p_1)\frac{\partial A_t(q,p)}{\partial q_1} + (rq_1 - p_1 - q_1p_2)\frac{\partial A_t(q,p)}{\partial p_1} + (\sigma p_2)\frac{\partial A_t(q,p)}{\partial q_2} + (-bp_2 + q_1p_1)\frac{\partial A_t(q,p)}{\partial p_2}. \quad (15)$$

Данное уравнение, записанное для наблюдаемых $x = q_1$, $y = p_1$ и $z = p_2$, задает классическую диссипативную модель Лоренца [14, 15]:

$$x' = -\sigma x + \sigma y, \quad y' = rx - y - xz, \quad z' = -bz + xy,$$

где $x' = dx(t)/dt$. Модель, предложенная Лоренцем в работе [14], является самой известной классической диссипативной системой со странным аттрактором. Эта система демонстрирует хаотическое поведение [14, 15], когда выбраны параметры, близкие к значениям $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$.

Дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ для системы (15) имеет вид

$$\mathcal{L}\left(q, p, \frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p}\right) = (-\sigma q_1 + \sigma p_1)\frac{\partial}{\partial q_1} + \\ +(r q_1 - p_1 - q_1 p_2)\frac{\partial}{\partial p_1} + (\sigma p_2)\frac{\partial}{\partial q_2} + (-b p_2 + q_1 p_1)\frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Перепишем данный оператор через $L^{\pm}_{q^k}$ и $L^{\pm}_{p^k}$. Получаем

$$\mathcal{L} = -(-\sigma L^+_{q_1} + \sigma L^+_{p_1})L^-_{p_1} + (r L^+_{q_1} - L^+_{p_1} - L^+_{q_1} L^+_{p_2})L^-_{q_1} - \\ -(\sigma L^+_{p_2})L^-_{p_2} + (-b L^+_{p_2} + L^+_{q_1} L^+_{p_1})L^-_{q_2}.$$

Вейлевское квантование этого оператора приводит к следующему оператору на алгебре квантовых наблюдаемых:

$$\hat{\mathcal{L}} = -\left(-\sigma \hat{L}^+_{q_1} + \sigma \hat{L}^+_{p_1}\right)\hat{L}^-_{p_1} + \\ + \left(r\hat{L}^+_{q_1} - \hat{L}^+_{p_1} - \hat{L}^+_{q_1}\hat{L}^+_{p_2}\right)\hat{L}^-_{q_1} - \\ - \left(\sigma \hat{L}^+_{p_2}\right)\hat{L}^-_{p_2} + \left(-b\hat{L}^+_{p_2} + \hat{L}^+_{q_1}\hat{L}^+_{p_1}\right)\hat{L}^-_{q_2}.$$

Используя определения операторов $\hat{L}^+_A, \hat{L}^-_A$, получаем квантовое уравнение типа Лоренца

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_t = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{\sigma(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2)}{2} - \frac{r\hat{q}_1^2}{2}, \hat{A}_t\right] - \frac{i\sigma}{\hbar}\hat{q}_1 \circ \left[\hat{p}_1, \hat{A}_t\right] + \\ + \frac{i}{\hbar}\hat{p}_1 \circ \left[\hat{q}_1, \hat{A}_t\right] + \frac{i}{\hbar}b\hat{p}_2 \circ \left[\hat{q}_2, \hat{A}_t\right] + \\ + \frac{i}{\hbar}\hat{q}_1 \circ \left(\hat{p}_2 \circ \left[\hat{q}_1, \hat{A}_t\right]\right) - \frac{i}{\hbar}\hat{q}_1 \circ \left(\hat{p}_1 \circ \left[\hat{q}_2, \hat{A}_t\right]\right).$$

Заметим, что вейлевское квантование приводит именно к данному виду двух последних слагаемых: $\hat{q}_k \circ \left(\hat{p}_l \circ \left[\hat{q}_m, \hat{A}\right]\right)$, каждое из которых равно $\hat{p}_l \circ \left(\hat{q}_k \circ \left[\hat{q}_m, \hat{A}\right]\right)$. Однако они не равны $(\hat{q}_k \circ \hat{p}_l) \circ \left[\hat{q}_m, \hat{A}\right]$, что следует из (6).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-02-17679-а).

Литература

1. *Березин Ф.А., Шубин М.А.* Уравнение Шредингера. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
2. *Тарасов В.Е.* Квантовая механика. М.: Вузовская книга, 2000.
3. *Dekker H.* // Phys. Rep. 1981. **80**. P. 1.
4. *Hasse R.W.* // J. Math. Phys. 1975. **16**. P. 2005.
5. *Тарасов В.Е.* // ТМФ. 1994. **100**. С. 402.
6. *Тарасов В.Е.* // ТМФ. 1997. **110**. С. 73.
7. *Филиппов В.М., Савчин В.М., Шорохов С.Г.* // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 40. М.: ВИНИТИ, 1992.
8. *Зайцев А.Г.* Алгебраические проблемы математической и теоретической физики. М.: Наука, 1974.
9. *Grgin E., Petersen A.* // J. Math. Phys. 1974. **15**. P. 764.
10. *Жевалков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
11. *Березин Ф.А.* // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. **17**. С. 117.
12. *Тарасов В.Е.* // Препринт НИИЯФ МГУ № 2000-33/637.
13. *Тарасов В.Е.* // Препринт НИИЯФ МГУ № 2001-22/662.
14. *Lorenz E.N.* // J. Atmos. Sci. 1963. **20**, No. 2. P. 130 (*Лоренц Э.* Детерминированное непериодическое течение // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 88).
15. *Sparrow C.* The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors (Appl. Math. Sci. V. 41). Berlin: Springer-Verlag, 1982.

Поступила в редакцию
30.05.01