

УДК 537.874

## ТЕОРЕМА КОРРЕКТНОСТИ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ НА НЕОДНОРОДНОСТИ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Е. Ю. Еремина

(кафедра математики)

E-mail: heremina@chat.ru

**Доказана теорема корректности граничной задачи рассеяния на неоднородности в слоистой среде. Показано, что для построения приближенного решения граничной задачи рассеяния в рамках метода дискретных источников достаточно лишь аппроксимировать условия сопряжения на поверхности рассеивателя в норме  $L_2$ .**

В работе [1] рассматривалось решение граничной задачи рассеяния электромагнитной волны на частице в пленке на поверхности подложки. При этом предполагалась справедливость теоремы корректности граничной задачи рассеяния, однако доказательство этого утверждения отсутствовало. В настоящей работе приводится строгое доказательство теоремы корректности для задачи рассеяния на неоднородности, расположенной в слоистой среде.

Пусть поле  $\{\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t\}$  удовлетворяет всем условиям следующей граничной задачи [1]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_\xi &= ik\varepsilon_\xi \mathbf{E}_\xi; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_\xi &= -ik\mu_\xi \mathbf{H}_\xi \quad \text{в } D_\xi, \quad \xi = 0, f, 1, i, \\ \mathbf{n}_p \times (\mathbf{E}_i(p) - \mathbf{E}_0(p)) &= 0, \\ \mathbf{n}_p \times (\mathbf{H}_i(p) - \mathbf{H}_0(p)) &= 0, & p \in \partial D, \\ \mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}_0(p) - \mathbf{E}_f(p)) &= 0, \\ \mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}_0(p) - \mathbf{H}_f(p)) &= 0, & p \in \Sigma_f, \\ \mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}_f(p) - \mathbf{E}_1(p)) &= 0, \\ \mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}_f(p) - \mathbf{H}_1(p)) &= 0, & p \in \Sigma_1, \end{aligned} \quad (1)$$

с условиями излучения или затухания на бесконечности для рассеянного частицей поля. Здесь  $\mathbf{n}_p$  — нормаль к поверхности  $\partial D$ ,  $\{\mathbf{E}_\xi, \mathbf{H}_\xi\}$ , где  $\xi = 0, f, 1, i$ , — полное поле в соответствующей области. В частности, поле  $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$  представляет собой сумму падающей волны, волны, отраженной от слоистой среды, и рассеянного частицей поля в  $D_0$ . Поверхность частицы предполагается достаточно гладкой,  $\partial D \subset C^{(1,\alpha)}$ , а параметры среды удовлетворяют условиям  $\operatorname{Im} \varepsilon_t, \mu_t \leq 0$ ,  $t = f, 1$  (временная зависимость  $\exp\{i\omega t\}$ ).

Предположим, что поле  $\{\mathbf{E}_t^0, \mathbf{H}_t^0\}$ ,  $t = 0, 1, f$ , есть решение задачи дифракции плоской волны на слоистой структуре в отсутствие частицы [1]. Тогда рассеянное поле вне частицы определяется выражением

$$\mathbf{E}_t^s := \mathbf{E}_t - \mathbf{E}_t^0, \quad \mathbf{H}_t^s := \mathbf{H}_t - \mathbf{H}_t^0, \quad t = 0, 1, f. \quad (2)$$

Граничная задача для рассеянного поля  $\{\mathbf{E}_t^s, \mathbf{H}_t^s\}$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_t^s &= ik\varepsilon_t \mathbf{E}_t^s; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_t^s = -ik\mu_t \mathbf{H}_t^s \quad \text{в } D_t, \quad t = 0, f, 1, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_i &= ik\varepsilon_i \mathbf{E}_i; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_i = -ik\mu_i \mathbf{H}_i \quad \text{в } D_i, \\ \mathbf{n}_p \times (\mathbf{E}_i(p) - \mathbf{E}_f^s(p)) &= \mathbf{n}_p \times \mathbf{E}_f^0(p), \\ \mathbf{n}_p \times (\mathbf{H}_i(p) - \mathbf{H}_f^s(p)) &= \mathbf{n}_p \times \mathbf{H}_f^0(p), & p \in \partial D, \\ \mathbf{n}_p \times (\mathbf{E}_0^s(p) - \mathbf{E}_f^s(p)) &= 0, \\ \mathbf{n}_p \times (\mathbf{H}_0^s(p) - \mathbf{H}_f^s(p)) &= 0, & p \in \Sigma_f, \\ \mathbf{n}_p \times (\mathbf{E}_f^s(p) - \mathbf{E}_1^s(p)) &= 0, \\ \mathbf{n}_p \times (\mathbf{H}_f^s(p) - \mathbf{H}_1^s(p)) &= 0, & p \in \Sigma_1, \end{aligned}$$

с условиями излучения на бесконечности для рассеянного частицей поля.

Как известно [2], существует электромагнитный тензор Грина этой задачи  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{e,h}^s(M, Q)$ , удовлетворяющий условиям

$$\nabla_M \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_e^{ts}(M, Q) = -ik\mu_t \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_h^{ts}(M, Q), \quad M \in D_t, \quad t = 0, 1, f,$$

$$\nabla_M \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_h^{ts}(M, Q) = ik\varepsilon_t \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_e^{ts}(M, Q) + \frac{i}{k_0\mu} \hat{I} \delta(M, Q), \quad Q \in D_0,$$

$$\nabla_M \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_e^{is}(M, Q) = -ik\mu_i \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_h^{is}(M, Q),$$

$$\nabla_M \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_h^{is}(M, Q) = ik\varepsilon_i \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_e^{is}(M, Q), \quad \text{в } D_i,$$

$$\mathbf{n}_p \times [\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{e,h}^{0s}(P, Q) - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{e,h}^{fs}(P, Q)] = 0, \quad P \in \Sigma_f, \quad (3)$$

$$\mathbf{n}_p \times [\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{e,h}^{fs}(P, Q) - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{e,h}^{1s}(P, Q)] = 0, \quad P \in \Sigma_1, \quad (4)$$

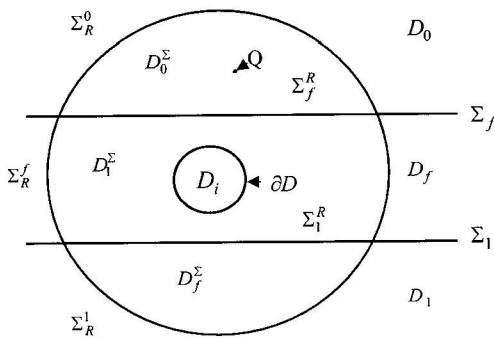
$$\mathbf{n}_p \times [\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{e,h}^{fs}(P, Q) - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{e,h}^{is}(P, Q)] = 0, \quad P \in \partial D,$$

с условиями излучения на бесконечности. Здесь  $\delta(M, Q)$  — дельта-функция Дирака.

В дальнейшем мы будем использовать векторный аналог формулы Грина

$$\int_{D_i} \left( \mathbf{P} \cdot \Delta \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Q}} - \Delta \mathbf{P} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Q}} \right) d\tau = - \int_S \mathbf{n} \left( \mathbf{P} \times \nabla \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Q}} + \nabla \mathbf{P} \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Q}} \right) d\sigma. \quad (5)$$

Возьмем сферу  $\Sigma_R$  радиуса  $R$  с центром внутри частицы такую, что точка  $Q$  лежит внутри сферы. Обозначим через  $\Sigma_t^R$ ,  $t = 1, f$ , часть границы раздела слоев, лежащую внутри  $\Sigma_R$ , через  $\Sigma_t^R$ ,  $t = 0, 1, f$ , часть поверхности сферы, принадлежащую соответствующей области  $D_t$ , а через  $D_t^\Sigma$ ,  $t = 0, 1, f$ , — часть области  $D_t$ , заключенную внутри  $\Sigma_R$  (рисунок).



Далее будем последовательно применять соотношение (5) к  $\mathbf{E}_t^s$  и  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_e^{ts}$  в различных областях  $D_t^\Sigma$  внутри сферы  $\Sigma_R$ . В  $D_0^\Sigma$ , используя определение  $\delta(M, Q)$  в левой части и учитывая векторное тождество

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{c}}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{c}}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{c}},$$

получим

$$\mathbf{E}_0^s(Q) = ik\mu_0 \int_{\Sigma_f^R + \Sigma_1^R} \left\{ [\mathbf{n}_p \times \mathbf{E}_0^s] \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_h^{0s}(P, Q) + [\mathbf{n}_p \times \mathbf{H}_0^s] \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_e^{0s}(P, Q) \right\} d\sigma_p, \quad Q \in D_0^\Sigma. \quad (6)$$

Аналогично применяя (5) к  $\mathbf{E}_t^s$  и  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_e^{ts}$  последовательно в каждой из областей  $D_1^\Sigma$ ,  $D_f^\Sigma$  и  $D_i^\Sigma$  и учитывая, что точка  $Q$  лежит в области  $D_0$ , получим следующие выражения:

$$0 = \int_{\Sigma_f^R + \Sigma_1^R + \Sigma_R^R + \partial D} \left\{ [\mathbf{n}_p \times \mathbf{E}_1^s] \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_h^{1s}(P, Q) + [\mathbf{n}_p \times \mathbf{H}_1^s] \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_e^{1s}(P, Q) \right\} d\sigma_p, \quad (7)$$

$$0 = \int_{\Sigma_1^R + \Sigma_1^R} \left\{ [\mathbf{n}_p \times \mathbf{E}_f^s] \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_h^{fs}(P, Q) + [\mathbf{n}_p \times \mathbf{H}_f^s] \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_e^{fs}(P, Q) \right\} d\sigma_p, \quad (8)$$

$$0 = \int_{\partial D} \left\{ [\mathbf{n}_p \times \mathbf{E}_i] \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_h^{is}(P, Q) + [\mathbf{n}_p \times \mathbf{H}_i] \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_e^{is}(P, Q) \right\} d\sigma_p. \quad (9)$$

В интегралах, стоящих в правых частях, нормаль  $\mathbf{n}_p$  всегда внешняя по отношению к рассматриваемой области.

Вычитая из (6) выражения (7), (8) и (9), с учетом условия (2), а также (3), (4) получим

$$\mathbf{E}_0^s(Q) = ik\mu_i \int_{\partial D} \left\{ [\mathbf{n}_p \times \mathbf{E}_f^s - \mathbf{n}_p \times \mathbf{E}_i] \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_h^{is}(P, Q) + [\mathbf{n}_p \times \mathbf{H}_f^s - \mathbf{n}_p \times \mathbf{H}_i] \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_e^{is}(P, Q) \right\} d\sigma_p. \quad (10)$$

В выражении (10) также учтено, что  $\mathbf{E}_t^s$  и  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_e^{ts}$  удовлетворяют условиям излучения на бесконечности, и при устремлении  $R$  к бесконечности интегралы по  $\Sigma_t^R$ ,  $t = 0, f, 1$ , обращаются в нуль. Таким образом, мы получили представление для рассеянного поля  $\mathbf{E}_t^s$  в  $D_0$  через граничные значения внешнего возбуждения только на поверхности частицы  $\partial D$ .

Предположим теперь, что у нас есть поле  $\{\tilde{\mathbf{E}}_t^s, \tilde{\mathbf{H}}_t^s\}$ , удовлетворяющее системе уравнений Максвелла, условиям излучения и условиям сопряжения на границах раздела слоистой среды  $\Sigma_f, \Sigma_1$ . Тогда оно удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{aligned} \text{rot } \tilde{\mathbf{H}}_t^s &= ik\epsilon_t \tilde{\mathbf{E}}_t^s; \quad \text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_t^s = -ik\mu_t \tilde{\mathbf{H}}_t^s \quad \text{в } D_t, \\ & \quad \quad \quad t = 0, f, 1, i, \\ \mathbf{n}_p \times (\tilde{\mathbf{E}}_0^s(p) - \tilde{\mathbf{E}}_f^s(p)) &= 0, \\ \mathbf{n}_p \times (\tilde{\mathbf{H}}_0^s(p) - \tilde{\mathbf{H}}_f^s(p)) &= 0, \quad p \in \Sigma_f, \\ \mathbf{n}_p \times (\tilde{\mathbf{E}}_f^s(p) - \tilde{\mathbf{E}}_1^s(p)) &= 0, \\ \mathbf{n}_p \times (\tilde{\mathbf{H}}_f^s(p) - \tilde{\mathbf{H}}_1^s(p)) &= 0, \quad p \in \Sigma_1, \end{aligned} \quad (11)$$

с условиями излучения на бесконечности для рассеянного частицей поля. Для этого поля можно записать соотношение, аналогичное (10):

$$\tilde{\mathbf{E}}_0^s(Q) = ik\mu_i \int_{\partial D} \left\{ [\mathbf{n}_p \times \tilde{\mathbf{E}}_f^s - \mathbf{n}_p \times \tilde{\mathbf{E}}_i] \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_h^{is}(P, Q) + [\mathbf{n}_p \times \tilde{\mathbf{H}}_f^s - \mathbf{n}_p \times \tilde{\mathbf{H}}_i] \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_e^{is}(P, Q) \right\} d\sigma_p. \quad (12)$$

Составим разность выражений (10) и (12) и возьмем максимум модуля от обеих частей в некотором компакте  $d \subset D_0$ . В результате с учетом неравенства Гельдера получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_0^s - \tilde{\mathbf{E}}_0^s\| &\leq \\ &\leq \hat{C}_0 \left\{ \left\| \mathbf{n}_p \times (\mathbf{E}_f^s - \tilde{\mathbf{E}}_f^s) - \mathbf{n}_p \times (\mathbf{E}_i - \tilde{\mathbf{E}}_i) \right\|_{L_2(\partial D)} + \right. \\ &\quad \left. + \left\| \mathbf{n}_p \times (\mathbf{H}_f^s - \tilde{\mathbf{H}}_f^s) - \mathbf{n}_p \times (\mathbf{H}_i - \tilde{\mathbf{H}}_i) \right\|_{L_2(\partial D)} \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\hat{C}_0 = \max_{Q \in d} \left\{ \left\| \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_e^{is}(P, Q) \right\|, \left\| \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_h^{is}(P, Q) \right\| \right\}$ . Поскольку точка  $Q$  лежит в  $D_0$ , то тензоры  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_e^{is}(P, Q)$  и  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_h^{is}(P, Q)$  аналитичны в  $d$ , значит, максимум достигается в  $d$ . Полученная оценка (13) представляет собой обобщение соотношения корректности [3] для внешней векторной задачи дифракции на случай наличия слоистой среды.

*Замечание.* При применении векторной формулы Грина в областях  $D_t$ ,  $t = 0, 1, f$ , использована процедура сглаживания угловых точек (точек сопряжения границ  $\Sigma_R^t$  и  $\Sigma_t^R$ ) сферой малого радиуса, который затем устремляется к нулю.

Итак, для построения приближенного решения  $\{\tilde{\mathbf{E}}_0^s, \tilde{\mathbf{H}}_0^s\}$  в  $D_0$ , удовлетворяющего уравнениям Максвелла, условиям излучения и условиям сопряжения на границах раздела слоистой среды, достаточно лишь обеспечить выполнение условий сопряжения на поверхности частицы  $\partial D$  в норме  $L_2(\partial D)$ . Таким образом, нами доказана следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $\{\mathbf{E}_t^s, \mathbf{H}_t^s\}$  — решение за-

дачи для рассеянного поля, а  $\{\tilde{\mathbf{E}}_t^s, \tilde{\mathbf{H}}_t^s\}$  — приближенное решение граничной задачи (11). Тогда чтобы обеспечить близость приближенного решения к точному на некотором компакте  $d \subset D_0$ , достаточно приблизить скачок тангенциальных компонент полей в норме  $L_2(\partial D)$  на поверхности частицы.

Автор выражает глубокую признательность профессору А.Г. Свешникову за поддержку, оказанную при написании статьи.

#### Литература

1. Еремина Е.Ю., Свешников А.Г. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 6. С. 13 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 6. P. 16).
2. Захаров Е.В. // Вычислительные методы и программирование. Т. XXIV. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. С. 37.
3. Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.

Поступила в редакцию  
06.06.01

УДК 530.145

## ЭВОЛЮЦИЯ СПИНА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Е. Лобанов, О. С. Павлова, Г. А. Чижов

(кафедра теоретической физики)

E-mail: th180@phys.msu.su

**Исследована динамика спина заряженной частицы с аномальным магнитным моментом в произвольном постоянном магнитном поле. Найден класс полей, в которых решение уравнения Баргмана–Мишеля–Телегди может быть представлено в аналитическом виде.**

Будем рассматривать эволюцию спина заряженной частицы во внешнем поле на основе классического описания. Предполагаем, что движение частицы описывается уравнением Лоренца, а движение спина на известной траектории подчиняется уравнению Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ).

При определенном в явном виде законе движения уравнение БМТ, как дифференциальное уравнение первого порядка, имеет решение в виде матричного ряда. Однако в произвольных полях определение закона движения в явном виде невозможно. В предыдущих наших работах [1, 2] был предложен метод исследования динамики спина без предварительного решения уравнения Лоренца. В частности, в [1] была решена задача об эволюции спина в плосковолновых полях специального типа. В продолжение исследования этой проблемы в настоящей статье рассматривается движение спина частицы с

аномальным магнитным моментом в произвольном постоянном магнитном поле. Цель работы — определить классы полей, в которых ряд, представляющий собой решение уравнения БМТ, имеет конечное число членов, и найти вид таких решений.

Для описания движения спина удобно использовать естественные координаты частицы, задаваемые ортами  $(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ , поскольку в постоянном магнитном поле величина вектора скорости остается фиксированной и, следовательно, движение частицы полностью определяется изменением ориентации естественного трехгранника. Как известно, эволюция ортов естественного трехгранника описывается системой кинематических уравнений Френе:

$$\dot{\mathbf{v}} = k\mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b}, \quad \dot{\mathbf{b}} = -\kappa\mathbf{n},$$

где  $k$  — кривизна, а  $\kappa$  — кручение. Используя