где $\mathbf{\Phi}$ — произвольная функция указанных аргументов.

Таким образом, если исключить из (16) начальные условия $(v_{\|}, v_{\perp}, \gamma)$, можно получить выражение для поля, допускающего траектории частиц, на которых уравнение БМТ имеет решение вида (11):

$$\mathbf{H} = H_0 \frac{\partial \theta}{\partial z} (\mathbf{e}_x \cos\theta + \mathbf{e}_y \sin\theta + \mathbf{e}_z \lambda). \qquad (19)$$

При этом $\theta(x, y, z)$ определяется в неявном виде формулой (18).

Для реализации интересующих нас траекторий необходимо и достаточно задать следующие начальные условия:

$$\dot{x}_0 = H_0 \cos\theta(x_0, y_0, z_0), \quad \dot{y}_0 = H_0 \sin\theta(x_0, y_0, z_0),$$
$$\dot{z}_0 = \sqrt{\gamma^2 - H_0^2 - 1}.$$

Частные случаи $H_{\|} = 0$ $(\lambda = 0)$ и $H_{\perp} = 0$, $H_{\|} = H_{\|}(x, y)$ $(\lambda \to \infty)$ являются полями соответственно спирального и линейного магнитных ондуляторов. Движение спина в таких полях рассматривалось нами ранее [2]. Отметим, что в случае $H_{\perp} = 0$ траектории интересующего нас типа реализуются при произвольных начальных условиях.

Итак, в работе определен класс полей и найдены начальные условия для движения частицы, при которых существуют аналитические решения уравнений БМТ для произвольных γ и g. Показано, что в постоянных полях, удовлетворяющих соотношению $H_{\|} = \lambda H_{\perp}$, достаточным условием такого представления решений является пропорциональность кривизны траектории и кручения.

Авторы благодарны В.Ч. Жуковскому, Б.А. Лысову и В.Г. Багрову за внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

Литература

1. *Лобанов А.Е., Павлова О.С.* // ТМФ. 1999. **121**, № 3. С. 509.
2. *Лобанов А.Е., Павлова О.С.* // Изв. вузов, Физика. 2000. № 1. С. 38.
3. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
4. *Bargmann V., Michel L., Telegdi V.* // Phys. Rev. Lett. 1959. **2**. P. 435.
5. *Лобанов А.Е.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 2. С. 59 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 2. P. 85).

Поступила в редакцию
20.06.01

УДК 535.12.01

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В МОДЕЛИ ЗОММЕРФЕЛЬДА

Ал. А. Власов

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

E-mail: vlasov@srdlan.npi.msu.su

На примере модели Зоммерфельда рассмотрены новые решения задачи о движении протяженной заряженной частицы во внешних полях: туннелирование, циклотронное движение, рассеяние на кулоновском центре, броуновское движение. Выявлены отличия таких движений от классических.

В работе [1] были обсуждены проблемы классического движения излучающей точечной заряженной частицы, описываемой уравнением Лоренца–Дирака. Для их решения много лет назад были предложены различные модели классических «размазанных» (т.е. не точечных) частиц. Одной из таких моделей является модель Зоммерфельда жесткой сферы с радиусом a, массой m и зарядом Q [2] (частица Зоммерфельда; см. также п. 4 в работе [1]).

В так называемом квазистационарном приближении [3–6] уравнение движения протяженной частицы в рамках этой модели принимает вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \eta \left[\mathbf{v}(t - 2a/c) - \mathbf{v}(t)\right], \qquad (1)$$

где a — радиус сферы, $\eta = \frac{Q^2}{3ca^2}$, $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt$, $\mathbf{R}$ — координата ее центра, $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ — внешняя сила.

В настоящей статье рассмотрены новые решения этого известного уравнения.

1. Туннелирование

Уравнение (1) имеет решения, которые можно интерпретировать как классическое туннелирование [7]. Физика такого эффекта проста: благодаря запаздыванию частица начинает «понимать», что подпадает под действие потенциальной силы слишком поздно, и проскакивает барьер.

Рассмотрим нерелятивистское решение уравнения (1) для потенциального барьера, который образован однородным статическим электрическим полем E_z, направленным вдоль оси z и отличным от нуля в слое $0 < z < L$ (модель плоского конденсатора):

$$E_z = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ E, & 0 < z < L, \\ 0, & L < z. \end{cases}$$

Пусть частица движется также вдоль оси z: $\mathbf{R} = (0, 0, R)$. Введем безразмерные переменные $y = R/L$, $x = ct/L$, $a^* = 2a/L$ и выберем для простоты $a^* = 1$. Внешняя сила, определяемая полем E_z, есть

$$F_{\text{ext}} = \int d\mathbf{r} \rho E_z = EQf, \tag{2}$$

где плотность заряда сферы Зоммерфельда дается формулой

$$\rho = Q\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{R}| - a)/4\pi a^2,$$

а ступенчатая функция

$$f = \begin{cases} 0, & y < -1/2, \\ (2y+1)/2, & -1/2 < y < 1/2, \\ (-2y+3)/2, & 1/2 < y < 3/2, \\ 0, & 3/2 < y, \end{cases}$$

возникает вследствие конечности размера частицы и ограниченности области пространства, в котором существует электрическое поле.

С учетом (2) уравнение движения (1) частицы Зоммерфельда принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = k\left[\frac{dy(x-1)}{dx} - \frac{dy(x)}{dx}\right] + \lambda f, \tag{3}$$

где $k = \frac{2Q^2}{3mc^2 a}$, $\lambda = \frac{LQE}{mc^2}$.

Сравним (1)–(3) с аналогичной задачей для классической заряженной точечной частицы без излучения. Такая частица подчиняется уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = F_E, \tag{4}$$

где

$$F_E = \lambda \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1, & 0 < y < 1, \\ 0, & 1 < y. \end{cases}$$

Классическое решение уравнения (4) таково:

$$v^2 = 2\lambda + v_0^2, \quad 0 < y < 1,$$

где $v = dy/dx$, v_0 — начальная скорость.

Для начальных скоростей меньше критической: $v_0^2 < v_{\text{cr}}^2$, $v_{\text{cr}}^2 = 2|\lambda|$, существует точка поворота, т. е. классическая частица не может преодолеть потенциальный барьер, барьер преодолевается, только если $v_0^2 > v_{\text{cr}}^2$.

Решение задачи о барьере для частицы Зоммерфельда существенно отличается от классического.

Можно попытаться построить решение уравнения (3) так: поделить ось z на единичные интервалы, найти аналитически решение на каждом из них, а затем сшить полученные решения на границах интервалов (скорость и координата сферы должны быть непрерывны). Однако для наших целей более эффективным будет численное интегрирование уравнения (3), которое и выявит эффект классического туннелирования частицы Зоммерфельда.

Численные результаты показаны на рис. 1–3. На рис. 1 видно возникновение эффекта туннелирования при $k = 1$, $\lambda = 0.5$: если начальные скорости сферы $v = 0.4$, 0.6 и 0.7, то все они приводят, как следует из рисунка, к повороту траектории; однако частица с начальной скоростью $v = 0.8$ проходит барьер — возникает эффект туннелирования. (Заметим, что все скорости выбраны из «подкритической области» $v \leqslant v_{\text{cr}} = 1.0$.)

На рис. 2 эффект туннелирования возникает при $k = 1$, $\lambda = 0.1$: если начальные скорости сферы $v = 0.12$ и 0.3, то все они приводят к повороту траектории; однако частица с начальной скоростью

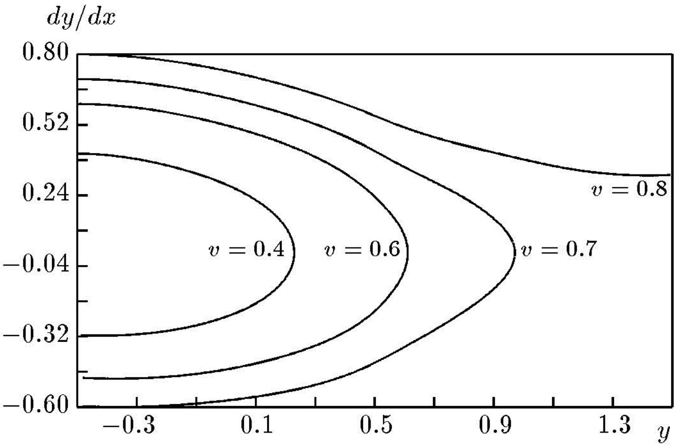

Рис. 1

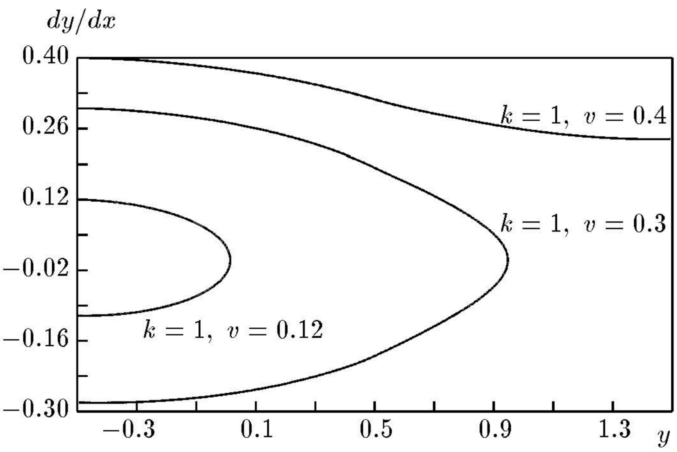

Рис. 2

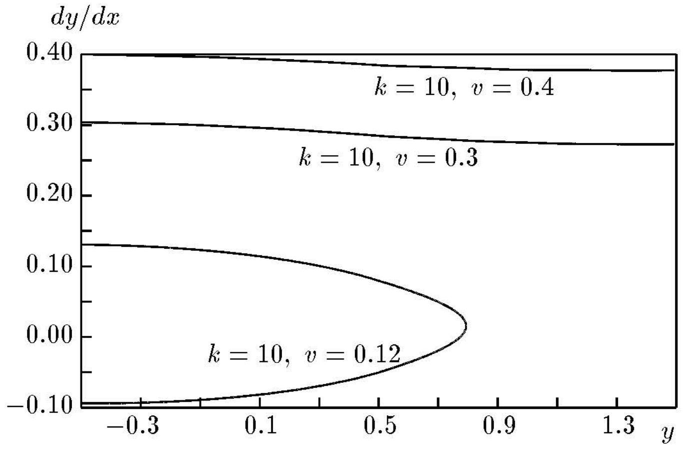

Рис. 3

$v = 0.4$ проходит барьер, т. е. туннелирует. (Все скорости выбраны из «подкритической области» $v \leqslant v_{\rm cr} = 0.44720$.)

Сравнение рис. 3 и рис. 2, различающихся только значением k, показывает, что чем больше значение k (сильнее запаздывание), тем сильнее эффект туннелирования: $k = 10$ для рис. 3, а λ и v — те же, что и для рис. 2. Эффект туннелирования на рис. 3 возникает уже для двух значений скорости: $v = 0.3$ и 0.4 (все скорости выбраны из «подкритической области» $v \leqslant \sqrt{2|\lambda|} = 0.44720$).

2. Частица в магнитном поле, циклотрон

Пусть частица Зоммерфельда радиуса a движется во внешнем статическом магнитном поле $\mathbf{H}$; тогда внешняя сила записывается так: $\mathbf{F}_{\rm ext} = \int d\mathbf{r}\rho[\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{H}]/c$ и для $\rho = Q\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{R}| - a)/4\pi a^2$ принимает вид

$$\mathbf{F}_{\rm ext} = \frac{Q}{c}[\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{H}]. \qquad (5)$$

Если магнитное поле сосредоточено в слое конечной толщины S $(0 < Y < S)$ и параллельно оси z $(\mathbf{R} = (X, Y, 0))$, то вследствие конечности размера частицы силу $\mathbf{F}_{\rm ext}$ (5) следует умножить на ступенчатую функцию f:

$$f = \begin{cases} 0, & Y < -a, \\ \dfrac{Y}{2a} + \dfrac{1}{2}, & -a < Y < a, \\ 1, & a < Y < S - a, \\ \dfrac{S - Y}{2a} + \dfrac{1}{2}, & S - a < Y < S + a, \\ 0, & S + a < y. \end{cases} \qquad (6)$$

В безразмерных переменных $x = X/M$, $y = Y/M$, $\tau = ct/M$ (M — масштабный множитель) уравнение (1) с учетом (5), (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= K\,[\dot{y}(\tau - d) - \dot{y}(\tau)] - \lambda \dot{x} f, \\ \ddot{x} &= K\,[\dot{x}(\tau - d) - \dot{x}(\tau)] + \lambda \dot{y} f, \end{aligned} \qquad (7)$$

где

$$f = \begin{cases} 0, & y < -\dfrac{d}{2}, \\ \dfrac{y}{d} + \dfrac{1}{2}, & -\dfrac{d}{2} < y < \dfrac{d}{2}, \\ 1, & \dfrac{d}{2} < y < L - \dfrac{d}{2}, \\ \dfrac{L - y}{d} + \dfrac{1}{2}, & L - \dfrac{d}{2} < y < L + \dfrac{d}{2}, \\ 0, & L + \dfrac{d}{2} < y, \end{cases} \qquad (8)$$

и

$$K = \frac{Q^2 M}{3a^2 mc^2}, \quad \lambda = \frac{QHM}{mc^2}, \quad d = \frac{2a}{M}, \quad L = \frac{S}{M}.$$

Классическим аналогом уравнений (7), (8) для точечной частицы без радиационного затухания является система

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\lambda \dot{x} g, \\ \ddot{x} &= \lambda \dot{y} g, \end{aligned} \qquad (9)$$

где

$$g = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1, & 0 < y < L, \\ 0, & L < y. \end{cases} \qquad (10)$$

Выбирая начальные условия в виде $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v$, получаем решение системы (9):

$$\begin{aligned} x &= -\frac{v}{\lambda} + \frac{v}{\lambda}\cos(\lambda\tau), \\ y &= \frac{v}{\lambda}\sin(\lambda\tau) \quad (0 < y < L). \end{aligned} \qquad (11)$$

Отсюда следует, что если начальные скорости меньше критической скорости $v_{\rm cr} = \lambda L$, то траектория частицы (полуокружность) целиком лежит внутри магнитного слоя и частица не может перейти через «потенциальный барьер» и войти в «запрещенную» область $y > L$. Для $L = 10^4$ и $\lambda = 10^{-4}$ величина критической скорости $v_{\rm cr}$ равна единице.

Уравнения (7) численно проинтегрированы для следующих значений скорости, толщины слоя и параметров частицы Зоммерфельда (см. также [8]): $v = 0.43$ и 0.44, $L = 10^4$, $\lambda = 10^{-4}$, $d = 1.0$, $K = 4/(3d^2)$, т. е. частица выбрана с зарядом и массой порядка электронных, магнитное поле — приближенно равным 10^{12} Гс, а длина слоя $S \approx 5.0 \cdot 10^{-9}$ см.

Результат интегрирования представлен на рис. 4, где для сравнения приведена классическая траектория (11) при $v = 0.44$. Отчетливо видно возникновение эффекта туннелирования для частицы Зоммерфельда: при скорости $v = 0.43$ частица движется в разрешенной области $y < L$, но при $v = 0.44$, которая меньше критической $v_{\rm cr} = 1$, частица проходит барьер и попадает в «запрещенную» область $y > L = 10^4$.

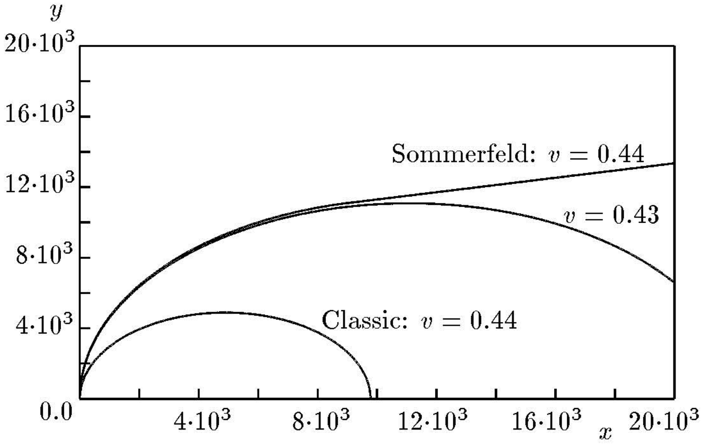

Рис. 4

Теперь рассмотрим движение частицы Зоммерфельда в скрещенных полях.

Пусть статическое магнитное поле параллельно оси z для $y < 0$ и $y > L$ и обращается в нуль при $0 < y < L$. Пусть для $0 < y < L$ существует статическое электрическое поле E, параллельное оси y, причем оно всегда коллинеарно y-компоненте скорости частицы (т. е. частица всегда ускоряется электрическим полем в зазоре $0 < y < L$). Тогда получаем простейшую модель циклотрона.

Уравнения движения частицы Зоммерфельда в циклотроне имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= K\,[\dot{y}(\tau - d) - \dot{y}(\tau)] - \lambda \dot{x} f + \epsilon\,\mathrm{sgn}(\dot{y})(1 - f), \\ \ddot{x} &= K\,[\dot{x}(\tau - d) - \dot{x}(\tau)] + \lambda \dot{y} f, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\epsilon = \frac{QEM}{mc^2}.$$

Классический аналог уравнений (12) получается занулением K и заменой f на g (10):

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\lambda \dot{x} g + \epsilon\,\mathrm{sgn}(\dot{y})(1 - g), \\ \ddot{x} &= \lambda \dot{y} g. \end{aligned} \tag{13}$$

Начальные условия выберем в виде

$$x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Согласно классическому уравнению движения (13), без радиационного трения частица движется по раскручивающейся спирали. Полный прирост кинетической энергии частицы $W_c = (\dot{x})^2/2 + (\dot{y})^2/2$ записывается в виде $W_c = N\epsilon L$, где N — число прохождений частицы через зазор с ускоряющим электрическим полем E. Если $N = 10$, $\epsilon = \lambda = 10^{\perp 7}$, $L = 10^5$, то $W_c = 10^{\perp 1}$. Уравнения движения частицы Зоммерфельда (12) были численно проинтегрированы с нулевыми начальными условиями и следующими значениями параметров: $L = 10^5$, $\lambda = 10^{\perp 7} = \epsilon$, $d = 0.3$, $K = 2.0$, т. е. частица выбиралась с массой и зарядом порядка электронных значений, магнитное поле — приближенно равным $8.0 \cdot 10^7$ Гс, а электрическое поле в зазоре соответствовало разности потенциалов 10^4 эВ, величина зазора была приближенно равна $10^{\perp 7}$ см.

Результаты вычислений представлены на рис. 5 (классический случай) и рис. 6 (частица Зоммерфельда). Видно, что для одного и того же «времени» $\tau \approx 10^8$ (т. е. $t \approx 10^{\perp 4}$ с) классическая частица без учета радиационного трения совершит $N = 10$ проходов через зазор с полным приростом кинетической энергии $W_c = 0.1$, тогда как частица Зоммерфельда — только $N = 6$ проходов с полным приростом кинетической энергии $W_s = 0.0375$ (для классической частицы прирост W_c для $N = 6$ равен 0.06). Таким образом, раскручивание траектории для частицы Зоммерфельда существенно запаздывает по сравнению с классическим случаем.

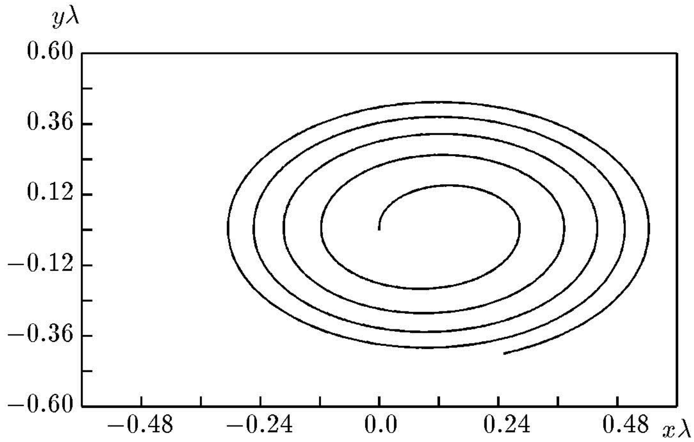

Рис. 5

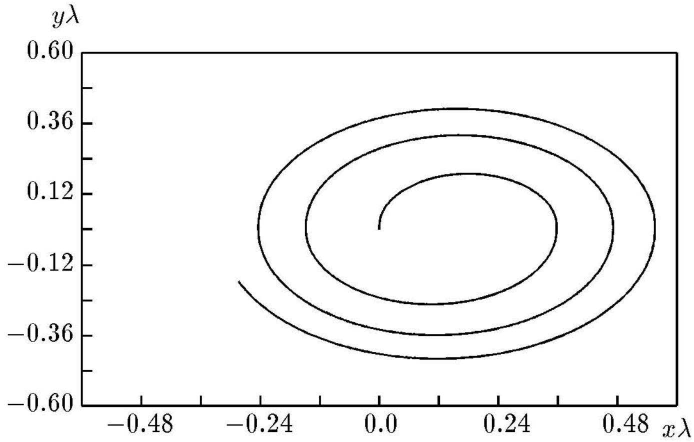

Рис. 6

Отметим, что запаздывание по росту энергии приходится в основном на моменты движения внутри зазора. Это можно объяснить отличием величин ускорения частицы в электрическом поле (пропорциональным $\epsilon \approx 10^{\perp 7}$) и в магнитном поле (пропорциональным $v\lambda \approx 10^{\perp 8}$): как известно, поток излучения электромагнитной энергии пропорционален квадрату ускорения излучающей частицы.

3. Рассеяние Резерфорда

Рассмотрим теперь задачу о рассеянии частицы Зоммерфельда на точечном кулоновском центре. Благодаря эффекту запаздывания такое рассеяние должно отличаться от стандартного рассеяния Резерфорда, и следует ожидать, что для частицы Зоммерфельда угол рассеяния будет меньше (см. также [9]).

Для численного счета воспользуемся уравнением (1). Внешняя сила $\mathbf{F}_{\text{ext}}$, образованная точечным зарядом e в точке $\mathbf{r}=0$, записывается в виде

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \int d\mathbf{r}\rho\frac{e\mathbf{r}}{r^3}, \tag{14}$$

что для сферы Зоммерфельда с плотностью заряда $\rho = Q\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{R}|-a)/4\pi a^2$ дает стандартное кулоновское выражение

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}, \quad R > a. \tag{15}$$

Переход к безразмерным переменным $\mathbf{R}=\mathbf{\Pi}\cdot 2L$, $ct = x\cdot 2L$ приводит уравнения (1), (15) к виду

$$\ddot{\mathbf{\Pi}} = K\left[\dot{\mathbf{\Pi}}(x-\delta) - \dot{\mathbf{\Pi}}(x)\right] + \lambda\mathbf{\Pi}|\mathbf{\Pi}|^{\perp 3}, \tag{16}$$

где

$$K = \frac{2Q^2L}{3mc^2a^2}, \quad \lambda = \frac{eQ}{2mc^2L}, \quad \delta = a/L.$$

Если рассеяние происходит в плоскости X–Y ($\mathbf{\Pi}=(X,Y,0)$), то система (16) разбивается на два уравнения:

$$\ddot{Y} = K\left[\dot{Y}(x-\delta) - \dot{Y}(x)\right] + \lambda Y(X^2+Y^2)^{\perp 3/2},$$
$$\ddot{X} = K\left[\dot{X}(x-\delta) - \dot{X}(x)\right] + \lambda X(X^2+Y^2)^{\perp 3/2}. \tag{17}$$

Начальные условия при $x=0$ возьмем в виде $X_i = 1000$, $Y_i = b$ (b — прицельный параметр), $\dot{X}_i = v_i$, $\dot{Y}_i = 0$. Выберем также начальную скорость $v_i = -0.1$ и следующие значения параметров: $K = 4/30$ и $\lambda = 0.1$ ($K/\lambda = (4/3)(Q/e)(1/\delta^2)$).

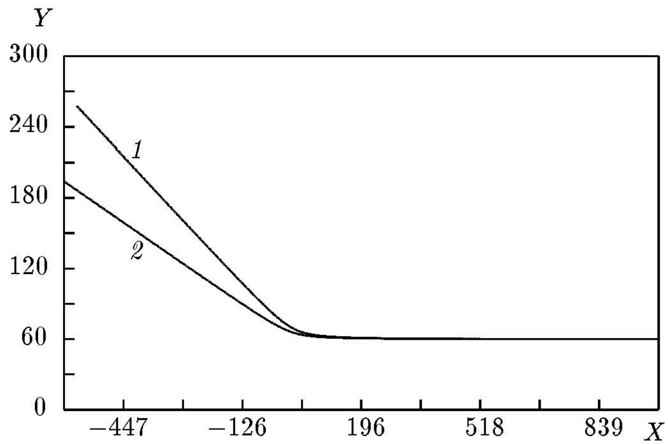

Рис. 7

Численные результаты представлены на рис. 7. Видно отличие рассеяния для классической задачи Резерфорда (кривая *1*) от рассеяния в модели Зоммерфельда (кривая *2*) для выбранных значений $b = 60.0$, и $\delta = 4.0$. Таким образом, вследствие запаздывания угол рассеяния θ для протяженной частицы меньше стандартного.

4. Запаздывание для броуновской частицы

Как уже отмечалось, уравнение движения частицы Зоммерфельда под действием внешней силы в квазистационарном приближении можно записать в безразмерном виде:

$$\dot{y}(x) + \Gamma y(x) = f(x) + \gamma\left[y(x-\delta) - y(x)\right], \tag{18}$$

где $y(x)$ — безразмерная скорость частицы; x — безразмерное время; $f(x)$ — внешняя сила; Γ —коэффициент вязкости окружающей среды; δ — запаздывание по времени; γ — коэффициент в соотношении, связывающем величину δ и отношение электромагнитной массы к механической: $\gamma\delta = (L/3a)(Q^2/a)/(mc^2)$ (здесь $2a$ — размер частицы Зоммерфельда с зарядом Q и массой m).

Если f — стохастическая сила, то (18) можно рассматривать как уравнение броуновского движения заряженной частицы с временным запаздыванием (см. также [10]).

Возникает естественный вопрос: совпадают ли эффективные температуры броуновского движения заряженной частицы и классической точечной незаряженной частицы? Для ответа воспользуемся методом спектральных разложений (или методом Райса, — см., напр., [11]).

С помощью фурье-преобразований

$$y(x) = \int dw \exp{(iwx)} y_w$$

решение основного уравнения (18) может быть представлено так:

$$\frac{1}{2i\pi}\int dz\, f(z)\int dw\frac{\exp{(iw(x-z))}}{g(w)},$$

где $g(w) = w - i\Gamma' + i\gamma\exp{(-iw\delta)}$, $\Gamma' = \Gamma + \gamma$. Тогда для стационарного процесса, т. е. для достаточно большого «времени» x: $x \gg 1/\Gamma$, но при произвольном запаздывании δ по сравнению с x, если корреляционная функция силы $R(x,y) = \langle f(x)f(y)\rangle$ имеет вид $R(x,y) = R_0\delta(x-y)$, то дисперсия D ($D = \langle y(x)y^*(x)\rangle$) запишется следующим образом:

$$D = \frac{R_0\delta}{2\pi}\int\limits_{\perp\infty}^{\infty}\frac{dw}{g(w)g^*(w)} \equiv \frac{R_0\delta}{2\pi}I, \tag{19}$$

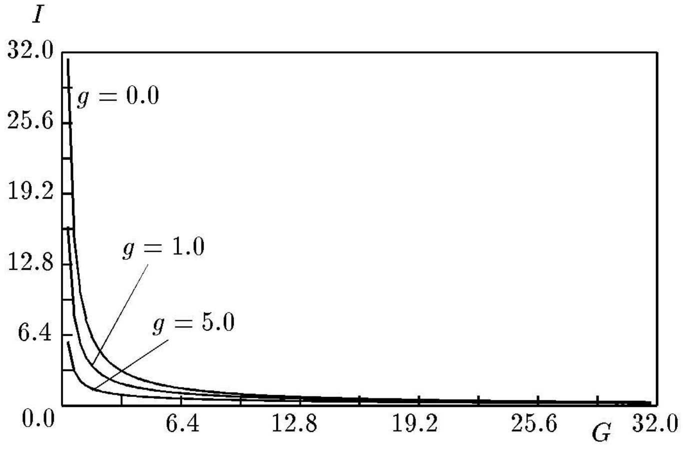

Рис. 8

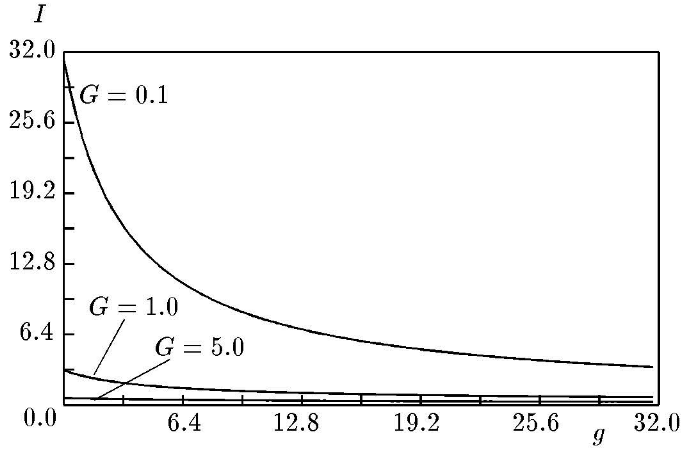

Рис. 9

где

$$I = I(g,G) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2+(G+g)^2+g^2-2g(G+g)\cos(z)+2gz\sin(z)} \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\Phi(z;g,G)} \tag{20}$$

и $g \equiv \gamma\delta$, $G \equiv \Gamma\delta$.

Таким образом, вместо того, чтобы решать исходное уравнение (18), а затем, используя найденные решения, искать дисперсию, можно сразу попытаться вычислить интеграл (19)–(20).

Функции $I(g,G)$ и $\Phi(z;g,G)$ имеют следующие свойства:

1) $\Phi > 0$ для $g, G > 0$;

2) если $g \equiv 0$ (т. е. запаздывание отсутствует), то $\Phi = z^2 + G^2 \equiv \Phi_B$ и интеграл I вычисляется явно:

$$I(g \equiv 0, G) = \pi/G \equiv I_B;$$

это дает стандартный броуновский результат:

$$D = \frac{R_0}{2\Gamma} \equiv D_B;$$

3) $d\Phi/dG > 0$ для всех z, g, G, отсюда $dI/dG < 0$;

4) $I(g, G \to 0) \to \infty$: для $G \to 0$ возникает полюс $z = 0$ в подынтегральном выражении $1/\Phi$: $\Phi(z \to 0, g, G \to 0) \approx z^2(1+g)^2 + G^2$, следовательно, если главный вклад в интеграл I дает окрестность полюса $z = 0$, то $I(g, G \to 0) \approx (\pi/G) \cdot 1/(1+g) = I_B/(1+g)$, так что

$$I(g,G) < I(g, G \to 0) = I_B/(1+g).$$

Результаты численного интегрирования функции I представлены на рис. 8 и 9. На рис. 8 изображены кривые $I(g,G)$ для $0.1 < G < 10$ и $g = 0.0,\ 1.0,\ 5.0$, а на рис. 9 — кривые $I(g,G)$ для $0 < g < 10$ и $G = 0.1,\ 1.0$, и 5.0. Видно, что $I(g,G) < I_B = \pi/G$.

Таким образом, величина дисперсии для заряженной броуновской частицы (и, следовательно, величина эффективной температуры) меньше, чем для классической броуновской частицы без электрического заряда.

Литература

1. *Власов Ал. А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 5. С. 17.
2. *Sommerfeld A.* // Gottingen Nachrichten. 1904. P. 29; 1904. P. 363; 1905. P. 201.
3. *Erber T.* // Fortschr. Phys. 1961. **9**. P. 343.
4. *Pearle P.* // Electromagnetism / Ed. D. Tepliz. N.Y.: Plenum Press, 1982. P. 211.
5. *Yaghjian A.* Relativistic Dynamics of a Charged Sphere: Lecture Notes in Phys. V. 11. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
6. *Rohrlich F.* // Am. J. Physics. 1997. **65**, No. 11. P. 1051; Phys. Rev. 1999. **D60**. P. 084017.
7. *Vlasov Alexander A.* E-print Archive: physics/9911059.
8. *Vlasov Alexander A.* E-print Archive: physics/0004026.
9. *Vlasov Alexander A.* E-print Archive: physics/9912051.
10. *Vlasov Alexander A.* E-print Archive: physics/0103065.
11. *Квасников И.А.* Термодинамика и статистическая физика. Ч. 2. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.

Поступила в редакцию
27.06.01