АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145:535

О ПОСТРОЕНИИ ВЫСШИХ ПОПРАВОК К ПРИБЛИЖЕНИЮ КРАМЕРСА–ХЕННЕБЕРГЕРА

О. В. Смирнова, Г. В. Смирнов

(*кафедра атомной физики, физики плазмы и микроэлектроники*)

E-mail: smirnova@mics.msu.su

Формальная аналогия между классическим методом осреднения и методом Крамерса–Хеннебергера приближенного описания динамики атомных систем в сильном монохроматическом поле используется для построения высших поправок к приближению Крамерса–Хеннебергера.

Введение

Идея метода Крамерса–Хеннебергера (КХ) [1–4] приближенного описания динамики атомных систем в сильном монохроматическом поле заключается в применении к исходному гамильтониану системы «атом + поле»

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + V(\mathbf{x}) \qquad (1)$$

(где*) $\mathbf{A} = A_0\mathbf{e}_x \sin\omega t$, $A_0 = -Fc/e\omega$, $V(x)$ — атомный потенциал, p — оператор импульса электрона) преобразования

$$S_{\text{KH}} = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c\mu}\mathbf{p}\int\limits_0^t \mathbf{A}(t')\,dt'\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{ie^2}{2\hbar\mu c^2}\int\limits_0^t A^2(t')\,dt'\right)$$

[1], приводящего гамильтониан (1) к следующему виду:

$$H_{\text{KH}} = \frac{p^2}{2\mu} + V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_x a_e \cos\omega t), \qquad (2)$$

где m и e — масса и заряд электрона, $a_e = F/m\omega^2$ — амплитуда осцилляций свободного электрона в поле с напряженностью $E = F/e$ и частотой ω. В приближении КХ в гамильтониане (2) зависящий от времени потенциал заменяется средним за период значением $V_{\text{KH}}(\mathbf{x}, a_e)$ — потенциалом КХ. Приближение КХ справедливо и продуктивно, если поправка $\Delta V = V(\mathbf{x}+\mathbf{e}_x a_e\cos\omega t) - V_{\text{KH}}(\mathbf{x}, a_e)$ несущественна. В этом случае все необходимые величины, например скорости ионизации, поляризуемости, могут быть вычислены по теории возмущений, а энергии стационарных состояний хорошо аппроксимируют точные квазиэнергии системы.

*) В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением поля линейной поляризации.

Целью настоящей работы является представление гамильтониана КХ

$$H_{\text{KH}} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta - V_0 f_0(\mathbf{x}, \delta) - V_0\sum_n f_n(\mathbf{x}, \delta)\cos n\omega t, \qquad (3)$$

$$f_n(\mathbf{x}, \delta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_x\delta^{-1}\cos\varphi\right)\cos(n\varphi)\,d\varphi,$$

$$\delta = a/a_e, \qquad (4)$$

где a — характерный размер для исходного потенциала, в виде асимптотического ряда по параметрам, контролирующим применимость приближения КХ [5], и обсуждение физического смысла высших поправок к приближению КХ.

В рамках формализма КХ можно описать два принципиально различных режима: режим теории возмущений и режим стабилизации. В пределе $\delta \gg 1$ реализуется режим теории возмущений: основные динамические характеристики атома (поляризуемость [6, 7], скорость ионизации [2]), вычисленные с использованием гамильтониана КХ при $\delta \gg 1$, совпадают с аналогичными величинами, вычисленными с использованием исходного гамильтониана (1) по стандартной теории возмущений [8]. Противоположный предел соответствует режиму стабилизации, поскольку скорость ионизации, вычисленная в приближении КХ в случае $\delta \ll 1$, убывает с увеличением интенсивности [9, 10].

Изучение области $\delta \gg 1$ интересно с методической точки зрения, так как в этой области возможно сопоставление результатов, полученных в формализме КХ и в рамках других подходов. Такое сопоставление позволяет выявить физический смысл формальных конструкций — потенциала КХ, собственных функций и собственных значений гамильтониана КХ, поправок к приближению КХ.

Вычислим величину сдвига уровня m, соответствующего невозмущенному состоянию $|m\rangle$, который обусловлен действием поля в случае $\delta \gg 1$. В работах [6, 7] для кулоновского потенциала показано, что положение уровня в потенциале КХ отражает величину штарковского сдвига в высокочастотном пределе. Ограничимся для простоты обсуждением одномерных систем с гладким потенциалом $V_0 f(x/a)$, чтобы не рассматривать случай вырожденных уровней. Следуя схеме, предложенной в работе [7], разложим потенциал $V_0 f(x/a+\delta^{-1}\cos\omega t)$ в ряд по δ^{-1}, вычислим потенциал КХ:

$$f_0(x,\delta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(\frac{x}{a}+\delta^{-1}\cos\varphi\right)d\varphi$$

и определим энергию уровня в потенциале КХ:

$$E_m^{\text{KH}}=\left\langle m^{\text{KH}}\right|\frac{p^2}{2}-V_0 f_0\left(\frac{x}{a},\delta\right)\left|m^{\text{KH}}\right\rangle,$$

ограничиваясь членами, квадратичными по полю:

$$E_m^{\text{KH}}=E_m+\frac{1}{4\omega^2}\left[1-\frac{V_0}{\omega^2}\langle m|\,f''\left(\frac{x}{a}\right)|m\rangle\right]F^2, \quad (5)$$

где E_m — энергия невозмущенного уровня. Здесь и далее, если не сказано иное, используются атомные единицы ($\mu=e=\hbar=1$). При вычислении (5) учтено, что в рассматриваемом случае ($\delta\gg 1$)

$$\left|m^{\text{KH}}\right\rangle=|m\rangle+\frac{\delta^{-2}}{4}V_0 a^2\sum_{l,l\neq m}\frac{\langle l|\,f''\,|m\rangle}{E_m-E_l}|l\rangle+O\left(\delta^{-4}\right).$$

Высокочастотное разложение динамической поляризуемости

$$\alpha(\omega)=\sum_k\frac{2x_{mk}^2\omega_{km}}{\omega_{km}^2-\omega^2}, \quad (6)$$

определяющей квадратичный по полю сдвиг невырожденных уровней $\Delta E_m=-\dfrac{1}{4}\alpha(\omega)F^2$, хорошо известно [11]:

$$\alpha(\omega)=-\frac{1}{\omega^2}+\frac{V_0}{\omega^4}\langle m|\,f''\left(\frac{x}{a}\right)|m\rangle-\frac{V_0^2}{\omega^6}\langle m|\left\{f''\left(\frac{x}{a}\right)\right\}^2|m\rangle+O\left(\frac{1}{\omega^8}\right). \quad (7)$$

Сопоставляя выражения (5) и (7), получим, что положение уровня в потенциале КХ аппроксимирует величину штарковского сдвига с точностью до ω^{-4}. Таким образом, возникает задача о построении поправок к потенциалу КХ, описывающих остальные члены в высокочастотном разложении динамической поляризуемости; иначе говоря, сформулирована обратная задача теории штарковского сдвига — определение потенциала по спектру состояний, изменившихся за счет эффекта Штарка. Известно, что в классической теории такая задача может быть решена однозначно, только если искомая функция (потенциальная энергия) — четная функция координаты [12].

1. Асимптотическое разложение функции Гамильтона в классической механике

Аппарат метода осреднения [13] позволяет привести неавтономную гамильтонову систему к автономному виду при помощи ограниченных при любом времени t преобразований. Запишем уравнения Гамильтона исследуемой системы после преобразования КХ (это преобразование определено и в классической механике [14–17]) в безразмерных единицах $\mu=V_0=a=1$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\theta}=\frac{\partial\tilde H_0}{\partial\mathbf{p}},\quad \frac{d\mathbf{p}}{d\theta}=-\frac{\partial\tilde H_0}{\partial\mathbf{x}}, \quad (8)$$

$$\tilde H_0=\varepsilon_\omega\left(\frac{p^2}{2}-f_0(\mathbf{x},\delta)-\sum_n f_n(\mathbf{x},\delta)\cos n\theta\right),\quad \tilde H_0=\varepsilon_\omega H_0, \quad (9)$$

где выражения для функций $f_n(\mathbf{x},\delta)$ заданы формулой (4), $\varepsilon_\omega=\Omega/\omega$, $\theta=\tau/\varepsilon_\omega$, $\tau=\Omega t$, $\Omega=\sqrt{V_0/\mu a^2}$. Потребуем малости ε_ω и представим функцию Гамильтона $\tilde H_0$ в виде ряда по ε_ω с помощью последовательного применения канонических преобразований, осуществляющих переход от переменных $\mathbf{x}_j,\mathbf{p}_j$ к переменным $\mathbf{x}_{j+1},\mathbf{p}_{j+1}$. Канонические преобразования заданы производящими функциями вида

$$F_{j+1}(\mathbf{x}_j,\mathbf{p}_{j+1},t)=\mathbf{x}_j\mathbf{p}_{j+1}+\varepsilon_\omega S_{j+1}(\mathbf{x}_j,\mathbf{p}_{j+1},t), \quad (10)$$

$$\mathbf{x}_{j+1}=\frac{\partial F_{j+1}}{\partial\mathbf{p}_{j+1}},\quad \mathbf{p}_j=\frac{\partial F_{j+1}}{\partial\mathbf{x}_j},\quad \tilde H_{j+1}(\mathbf{x}_{j+1},\mathbf{p}_{j+1},\theta)=\tilde H_j(\mathbf{x}_j,\mathbf{p}_j,\theta)+\frac{\partial F_{j+1}}{\partial\theta}. \quad (11)$$

Применяя преобразование (10), (11) и выбирая функции $S_{j+1}(\mathbf{x}_j,\mathbf{p}_{j+1},t)$ согласно соотношениям $\varepsilon_\omega\frac{\partial S_{j+1}(\mathbf{x}_j,\mathbf{p}_{j+1},\theta)}{\partial\theta}=-X_j$, где X_j — все члены функции Гамильтона, обращающиеся в нуль при усреднении по периоду в $(j+1)$-м порядке по ε_ω, приведем исходную функцию Гамильтона (9) к следующему виду:

$$H_j=\frac{p_j^2}{2}-f_0(\mathbf{x}_j,\delta)+\varepsilon_\omega^2 A_1(\mathbf{x}_j,\delta)+\varepsilon_\omega^4 A_2(\mathbf{x}_j,\mathbf{p}_j,\delta)+\ldots+O\left(\varepsilon_\omega^{j+1}\right).$$

Для примера выпишем производящие функции F_1, F_2 первых двух преобразований, осуществляющих переход от переменных $\mathbf{x},\mathbf{p}$ к переменным $\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2$, которые определяют функцию $A_1 = \sum_n \frac{1}{4n^2}[\nabla f_n(\mathbf{x},\delta)]^2$:

$$F_1(\mathbf{x},\mathbf{p}_1,\theta) = \mathbf{x}\mathbf{p}_1 + \varepsilon_\omega S_1(\mathbf{x},\theta), \tag{12}$$

где $S_1(\mathbf{x},\theta) = \sum_n \frac{1}{n} f_n(\mathbf{x},\delta)\sin n\theta$,

$$F_2(\mathbf{x}_1,\mathbf{p}_2,\theta) = \mathbf{x}_1\mathbf{p}_2 + \varepsilon_\omega S_2(\mathbf{x}_1,\mathbf{p}_2,\theta),$$

где $S_2(\mathbf{x}_1,\mathbf{p}_2,\theta) = \varepsilon_\omega \sum_n \frac{1}{2n^2}\Big(\mathbf{p}_2\nabla f_n(\mathbf{x}_1,\delta) + \nabla f_n(\mathbf{x}_1,\delta)\,\mathbf{p}_2\Big)\cos n\theta$.

Ранее поправка A_1 к потенциалу КХ в рамках классической механики была получена в работе [17].

2. Асимптотическое разложение гамильтониана в квантовой механике

Преобразования, проведенные в предыдущем параграфе, могут быть обобщены на случай квантовых систем. Запишем уравнение Шрёдингера для исходной системы после преобразования КХ в безразмерных единицах $\mu = V_0 = a = 1$:

$$i\tilde{\hbar}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = \tilde{H}\Psi, \tag{13}$$

$$\tilde{H} = \varepsilon_\omega\left(\frac{p^2}{2} - f_0(\mathbf{x},\delta) - \sum_n f_n(\mathbf{x},\delta)\cos n\theta\right),$$

где $\varepsilon_\omega = \Omega/\omega$, $\theta = \tau/\varepsilon_\omega$, $\tau = \Omega t$, $\Omega = \sqrt{V_0/\mu a^2}$, $\tilde{\hbar} = \hbar\Omega/V_0$.

Преобразование U_{j+1}, соответствующее каноническому преобразованию (10), (11), имеет вид

$$U_{j+1} = \exp\left\{\frac{i}{\tilde{\hbar}}\varepsilon_\omega \int\limits_0^\theta X_j(\theta')\,d\theta'\right\},$$

где $X_j(\theta)$ — все члены гамильтониана, определенного соотношением

$$\tilde{H}_j = U_j\tilde{H}_{j-1}U_j^+ + i\frac{\partial U_j}{\partial t}U_j^+,$$

которое обращается в нуль при усреднении по периоду в $(j+1)$-м порядке по ε_ω. При этом волновая функция преобразуется по закону $\Psi_{j+1} = U_{j+1}^+\Psi_j$.

Преобразование U_1 имеет следующий вид:

$$U_1 = \exp\left\{\frac{i}{\tilde{\hbar}}\varepsilon_\omega\sum_n \frac{1}{n} f_n \sin n\theta\right\}.$$

Подставляя в уравнение (13) волновую функцию Ψ в виде $\Psi = U_1\Psi_1$, получим уравнение

$$i\tilde{\hbar}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta} = \tilde{H}_1\Psi_1,$$

где

$$\tilde{H}_1 = \varepsilon_\omega\Bigg(\frac{p^2}{2} - f_0(\mathbf{x},\delta) - \varepsilon_\omega\sum_n \frac{1}{2n^2}\left(\mathbf{p}\nabla f_n(\mathbf{x},\delta) + \nabla f_n(\mathbf{x},\delta)\,\mathbf{p}\right)\sin n\theta + \varepsilon_\omega^2 A_1 + \varepsilon_\omega^2\sum_{\substack{n,l,\\ n\neq l}}\frac{1}{l(l-n)}\nabla f_l(\mathbf{x},\delta)\nabla f_{l-n}(\mathbf{x},\delta)\cos n\theta + O\left(\varepsilon_\omega^3\right)\Bigg). \tag{14}$$

Заметим, что гамильтониан (14) совпадает с функцией Гамильтона $\tilde{H}_1$, которая получена после осуществления канонического преобразования, заданного функцией F_1 (12). Применение преобразования U_2 с учетом разложения Хаусдорфа

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + \ldots = \sum_n \frac{1}{n!}\left[\hat{A}\left[\hat{A},\ldots\left[\hat{A},\hat{B}\right]\ldots\right]\right]$$

не приводит к возникновению поправок к потенциалу A_1, т.е. все члены гамильтониана $\tilde{H}_2$, не обращающиеся в нуль при усреднении по периоду, имеют более высокий порядок малости по ε_ω, чем A_1. Таким образом, гамильтониан $\tilde{H}_2$ можно записать в виде

$$\tilde{H}_2 = \varepsilon_\omega\left(\frac{p^2}{2} - f_0(\mathbf{x},\delta) + \varepsilon_\omega^2 A_1 + \varepsilon_\omega^2 X_2 + O\left(\varepsilon_\omega^3\right)\right),$$

а модифицированный потенциал КХ описывается выражением вида

$$-f_0(\mathbf{x},\delta) + \varepsilon_\omega^2\sum_n \frac{1}{4n^2}\left[\nabla f_n(\mathbf{x},\delta)\right]^2 \tag{15}$$

и не содержит специфических квантовых поправок. Структура потенциала (15) обсуждается в работе [17].

3. Положение уровня энергии в модифицированном потенциале КХ

Определим положение уровня $|m_2\rangle$ в модифицированном потенциале (15) в случае $\delta \gg 1$ для одномерных систем, вычисляя матричный элемент вида

$$\langle m_2|\,\frac{p^2}{2} - f_0(x,\delta) + \varepsilon_\omega^2\sum_n \frac{1}{4n^2}\left[f_n(x,\delta)\right]^2|m_2\rangle$$

и ограничиваясь членами, квадратичными по полю:

$$E_{m_2}^{\text{КН}} = E_m + \frac{1}{4\omega^2} \times$$
$$\times\left[1 - \frac{V_0}{\omega^2}\langle m| f''\left(\frac{x}{a}\right)|m\rangle + \frac{V_0^2}{\omega^4}\langle m|\left\{f''\left(\frac{x}{a}\right)\right\}^2|m\rangle\right]F^2, \tag{16}$$

где E_m — энергия невозмущенного уровня $|m\rangle$. Здесь учтено, что в случае $\delta \gg 1$ поправки f_n (4) имеют вид $f_n = \frac{\delta^{-n}}{2^{n-1}n!}f^{(n)} + O\left(\delta^{-n-1}\right)$ $(n \neq 0)$. Выражение (16) записано в атомных единицах. Сопоставляя (7) и (16), получим, что положение уровня в потенциале (15) аппроксимирует величину квадратичного штарковского сдвига невырожденного уровня в высокочастотном поле линейной поляризации с точностью до ω^{-6}.

Заключение

Формальная аналогия метода КХ и метода осреднения использована для построения высших поправок к приближению КХ.

Показано, что учет первой неисчезающей поправки к потенциалу КХ по (Ω/ω) в случае $\delta \gg 1$ определяет модифицированный потенциал КХ, положение энергетических уровней в котором аппроксимирует величину квадратичного штарковского сдвига невырожденного уровня в высокочастотном поле линейной поляризации с точностью до ω^{-6} включительно.

Авторы благодарны Р.В. Карапетяну, А.М. Попову и М.В. Федорову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-02-16046).

Литература

1. *Kramers H.A.* Les Particules Élémentaires: Report to the Eighth Solvay Conf. Brussels: Editions Stoops, 1950.
2. *Henneberger W.C.* // Phys. Rev. Lett. 1968. **21**. P. 838.
3. *Burnnett K., Reed V.C., Knight P.L.* // J. Phys. B. 1993. **26**. P. 561.
4. *Делоне Н.Б., Крайнов В.П.* // УФН. 1995. **165**. С. 1295.
5. *Смирнова О.В.* // ЖЭТФ. 2000. **117**. С. 702.
6. *Pont M., Gavrila M.* // Phys. Lett. 1987. **A123**. P. 469.
7. *Popov A.M., Tikhonova O.V., Volkova E.A.* // Laser Phys. 2000. **10**, No. 1 (in press).
8. *Делоне Н.Б., Крайнов В.П.* Атом в сильном световом поле. М.: Энергоатомиздат, 1984 (*Delone N.B., Krainov V.P.* Multiphoton Processes in Atoms. Heidelberg: Springer-Verlag, 1994).
9. *Pont M., Gavrila M.* // Phys. Rev. Lett. 1990. **65**. P. 2362.
10. *Волкова Е.А., Попов А.М., Смирнова О.В.* // ЖЭТФ. 1994. **106**. С. 1360.
11. *Elyutin P.V.* // Phys. Lett. 1997. **A233**, No. 3. P. 175.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1988.
13. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988.
14. *Grochmalicki J., Lewenstein M., Rzazewski K.* // Phys. Rev. Lett. 1991. **66**, No. 8. P. 1038.
15. *Benvenuto F., Casati G., Shepelyansky D.L.* // Phys. Rev. 1993. **A47**, No. 2. P. R786.
16. *Casati G., Guarneri I., Mantica G.* // Phys. Rev. 1994. **A50**, No. 6. P. 5018.
17. *Karapetyan R.V.* // Laser Physics. 2000. **10**. P. 160.

Поступила в редакцию
21.02.01

УДК 539.186.2

РОЛЬ СПИНОВЫХ ПРАВИЛ ОТБОРА В КОГЕРЕНТНОМ ФОТОРОЖДЕНИИ η-МЕЗОНОВ НА ЯДРАХ В ОБЛАСТИ БАРИОННЫХ РЕЗОНАНСОВ

М. М. Каскулов, А. В. Бибиков

(НИИЯФ)

E-mail: kaskulov@mail.ru

Когерентное фоторождение η-мезонов на ядрах с $J = T = 0$ рассматривается с точки зрения доминирующей роли правил отбора, накладываемых спиновой структурой вершинных функций на процесс возбуждения и распада $S_{11}(1535)$- и $D_{13}(1520)$-резонансных субнуклонных степеней свободы ядра.

Введение

Интенсивное теоретическое исследование когерентного фоторождения η-мезонов на ядрах с замкнутыми оболочками (с нулевым полным спином и изоспином), которое ведется уже на протяжении нескольких лет [1–5], связано в первую очередь с началом активного систематического экспериментального изучения указанной реакции [6, 7]. Основная проблема, которая объединяет различные теоретические подходы к изучению когерентного фоторождения η-мезонов, состоит в том, что вопреки сильной связи $S_{11}(1535)$-резонанса в канале $N + \eta$ и его доминирующей роли в элементарном процессе фоторождения η на нуклоне вклад этого