

РАДИОФИЗИКА

УДК 534.222

ПРОХОЖДЕНИЕ ШИРОКОПОЛОСНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНУЮ СРЕДУ

В. А. Гусев, О. В. Руденко

(кафедра акустики)

E-mail: rudenko@acs366b.phys.msu.su

Развит подход, позволяющий описать волны с широким частотным спектром, распространяющиеся в случайно-неоднородной среде. Рассмотрена модель неоднородного слоя в виде бесконечно тонкого фазового экрана. В качестве обобщения на слой конечной толщины получено уравнение типа Бюргера для среднего поля, дающее возможность одновременно учесть и нелинейные эффекты. В приближении фазового экрана для ударного импульса N -образной формы определены усредненные профили и статистические характеристики пикового давления на фронте ударной волны.

Сигналы с широким частотным спектром формируются при распространении интенсивных акустических волн в нелинейной среде. Даже в тех случаях, когда исходный спектр состоит из одной или нескольких узких линий, в средах без дисперсии он заметно уширяется в результате эффективной генерации высших гармоник и комбинационных частот [1]. Часто сам исходный сигнал уже имеет широкий спектр; примерами могут служить интенсивные шумы реактивных струй, а также мощные импульсные возмущения типа взрывных волн и звуковых ударов [2].

Расчет пространственно-временных и спектральных характеристик широкополосных сигналов в средах со случайными неоднородностями необходим в ряде прикладных задач. Среди наиболее важных можно отметить проблемы, связанные с распространением интенсивных ультразвуковых волн и коротких видеоимпульсов через неоднородные биологические ткани, органы и человеческое тело в целом [3], а также с прохождением звукового удара, генерируемого сверхзвуковым самолетом, через приземный турбулентный слой атмосферы [4].

Рассмотрим вначале идеализированный случай. Пусть флуктуации параметров среды локализованы в слое, толщина которого мала по сравнению с характерной нелинейной длиной. В этом случае, очевидно, можно использовать поэтапный подход. Иными словами, будем считать, что волна претерпевает нелинейные искажения на пути к слою и за ним, а сам процесс прохождения через слой может быть описан в рамках линейной задачи. Такой подход, состоящий в моделировании слоя случайным фазовым экраном, был использован в работах [4–6] применительно к волнам звукового удара. В медицинских приложениях модель экрана использовалась, например, при анализе проникновения ультразвука в мозг через кости черепа [7].

Пусть экран совпадает с плоскостью (x, y) декартовой системы координат, а ось направлена по нормали к нему. Рассмотрим случай нормального падения, не ограничиваясь приближением геометрической акустики [6]. Более общая задача о наклонном падении [4], важная для решения задачи о распространении волн звукового удара, может быть рассмотрена аналогичным способом.

Воспользуемся линеаризованным уравнением Хохлова–Заболотской [1, 2]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial \tau} = \frac{c}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right). \quad (1)$$

Здесь p — акустическое давление, c — скорость звука, $\tau = t - z/c$ — время в сопровождающей волну системе координат. Решение (1) для исходного возмущения

$$p(t; x, y, z = 0) = p_0(t; x, y) \quad (2)$$

имеет вид

$$p = \frac{1}{2\pi cz} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \times \\ \times p_0 \left[\tau - \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2cz}; x', y' \right]. \quad (3)$$

Если выражение (2) описывает поле волны непосредственно перед фазовым экраном, то сразу после прохождения экрана волна приобретает случайный сдвиг фазы φ и в решении (3) следует изменить аргумент функции p_0 . Подынтегральная функция примет вид

$$p_0 \left[\tau - \varphi(x', y') - \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2cz}; x', y' \right]. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3) и переходя к фурье-представлению поля:

$$p_0(\tau, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (5)$$

приведем решение (3) к виду

$$p = \frac{1}{2\pi cz} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} S d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \times \exp \left[-i\omega\tau + i\omega\varphi + i\omega \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2cz} \right]. \quad (6)$$

В формулах (5) и (6) S — спектр волны, который не предполагается узким. В дальнейшем рассмотрение будет сосредоточено на анализе импульсных сигналов N -образной формы, характерной для звуковых ударов или взрывных возмущений на больших расстояниях от места их возникновения. Кроме того, будем считать, что $S = S(\omega)$, т. е. спектр не зависит от координат в плоскости экрана.

Рассмотрим вначале среднее поле. Считая флуктуации фазы малыми по сравнению с π , что типично для атмосферных [4] или биологических [7] неоднородностей, будем описывать их нормальным законом распределения с нулевым средним значением. При этом

$$\langle \exp(i\omega\varphi) \rangle = \exp(-\omega^2 \sigma^2 / 2), \quad \sigma^2 = \langle \varphi^2 \rangle, \quad (7)$$

где угловые скобки обозначают статистическое среднее. С учетом (7) интеграл (6) легко вычисляется:

$$\langle p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\tau') \exp \left\{ -\frac{(\tau - \tau')^2}{2\sigma^2} \right\} d\tau'. \quad (8)$$

Заметим, что средний временной профиль (8) волны от координаты z не зависит. Нас интересует поведение N -волны, поэтому положим в решении (8)

$$p_0(\tau') = -A \frac{\tau'}{T}, \quad |\tau'| \leq T, \quad (9)$$

$$p_0 = 0, \quad |\tau'| > T.$$

Здесь T — продолжительность фаз сжатия и разрежения, A — пиковое давление в N -волне. Вычисляя интеграл (8) с учетом формы (9) падающей на экран волны, получим

$$\langle p \rangle = -A \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2\beta^2} (1 + \tau/T)^2 \right] - \exp \left[-\frac{1}{2\beta^2} (1 - \tau/T)^2 \right] \right\} - \quad (10)$$

$$- A \frac{\tau}{2T} \left\{ \Phi \left(\frac{1 + \tau/T}{\beta\sqrt{2}} \right) + \Phi \left(\frac{1 - \tau/T}{\beta\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

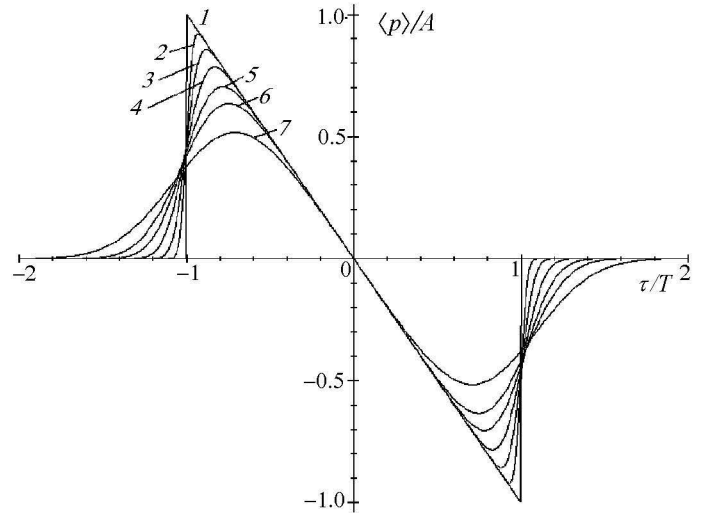


Рис. 1

В решении (10) Φ — интеграл ошибок, $\beta = \sigma/T$.

Профиль импульса (10), прошедшего через случайный фазовый экран, изображен на рис. 1 для различных значений дисперсии флуктуаций фазы. Кривые 1–7 построены для значений $\beta = 0; 0.03, 0.06, 0.1, 0.2, 0.4$ и 0.6 соответственно. Видно, что с ростом флуктуаций происходит уширение переднего и заднего ударных фронтов, а также уменьшение пиковых давлений.

Описанные искажения профиля напоминают картину прохождения волны через однородный слой диссипативной среды. В этом смысле пространственные флуктуации действуют подобно «турбулентной вязкости» [1]. Отмеченная аналогия легко усматривается в структуре решения (8). Действительно, заменяя бесконечно тонкий фазовый экран случайно-неоднородным слоем малой толщины ℓ :

$$\sigma^2 = 2\delta\ell, \quad \delta \approx \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \ell},$$

нетрудно убедиться в том, что решение (8) будет удовлетворять параболическому уравнению

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \ell} = \delta \frac{\partial^2 \langle p \rangle}{\partial \tau^2}, \quad (11)$$

хорошо известному в теории волн [8]. Таким образом, эффективная вязкость среды b [1, 8], приводящая к диссипативным эффектам в бегущих волнах, может быть сопоставлена дисперсии флуктуаций фазы 2δ на единицу длины пути:

$$b = 4c^3 \rho_0 \delta,$$

где ρ_0 — плотность среды.

Если теперь представить протяженную случайно-неоднородную среду как последовательность фазовых экранов, уравнение (11) будет служить простой моделью для описания среднего поля в такой

среде. Более того, поскольку в рамках эволюционного подхода слабые нелинейные и диссипативные эффекты в уравнениях типа (1), (11) описываются независимыми аддитивными членами [1, 8], обобщением модели (11), позволяющим описать нелинейные эффекты, будет уравнение Бюргерса для среднего поля:

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho_0} \langle p \rangle \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \tau} = \delta \frac{\partial^2 \langle p \rangle}{\partial \tau^2}. \quad (12)$$

Здесь ε — нелинейный параметр [1, 8], z — «медленная» координата в направлении распространения волны.

Перейдем теперь к вычислению среднего

$$\langle p_1 p_2^* \rangle = \langle p(\tau_1; x_1, y_1, z) p^*(\tau_2; x_2, y_2, z) \rangle,$$

пользуясь интегральным представлением (6) решения уравнения (1). Считая корреляционную функцию флуктуаций фазы зависящей только от расстояния между точками $\rho_1 = (x_1, y_1)$ и $\rho_2 = (x_2, y_2)$ в плоскости экрана, получим

$$\begin{aligned} \langle \exp [i\omega_1 \varphi_1(x_1, y_1) - i\omega_2 \varphi_2(x_2, y_2)] \rangle = \\ = \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1 \omega_2 B(\rho)) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где $B(\rho) = \frac{1}{\sigma^2} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle$, $\rho = |\rho_1 - \rho_2|$, B — коэффициент корреляции функции $\varphi(x, y)$.

Будем считать, что измерения поля за экраном производятся в одной точке. При этом, полагая $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ в выражении $\langle p_1 p_2^* \rangle$, с учетом формулы (13) для интенсивности волны $\langle p^2 \rangle$ получим

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle = i \frac{a^2}{2cz} \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_1) S(\omega_2) \times \\ \times \exp \left[-i\omega_1 \tau_1 + i\omega_2 \tau_2 - \frac{\sigma^2}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \right] \frac{d\omega_1 d\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \times \\ \times \int_0^{\infty} \exp \left[-i \frac{a^2}{2cz} \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \nu + \sigma^2 \omega_1 \omega_2 B(\nu) \right] d\nu, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\nu = \rho^2/a^2$, a — радиус корреляции фазовых флуктуаций. Главный вклад в интеграл по частотам в (14) в плоскости (ω_1, ω_2) вносит окрестность значения $\omega_1 = \omega_2$. Именно для таких частот во внутреннем интеграле (14) по $d\nu$ подынтегральное выражение быстро осциллирует, и основной вклад дает область малых значений ν . Поэтому представим коэффициент корреляции в виде разложения в ряд с учетом первых двух членов: $B(\nu) \approx 1 - \nu$.

После такого упрощения решение (14) примет вид

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p_0^2(\tau') G(z, \tau - \tau') d\tau', \quad (15)$$

где функция Грина

$$\begin{aligned} G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\Omega\tau - (\sigma^2/2)\Omega^2)}{1 - ig\Omega} d\Omega, \\ g = \frac{2cz}{a^2} \sigma^2, \end{aligned} \quad (16)$$

равна

$$\begin{aligned} G = \frac{1}{2g} \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{g} - \frac{\tau}{\sigma} \right)^2 - \frac{\tau^2}{2\sigma^2} \right] \times \\ \times \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sigma}{g} - \frac{\tau}{\sigma} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Как видно из формул (15)–(17), решение для $\langle p^2 \rangle$, в отличие от решения (8) для $\langle p \rangle$, зависит от пройденного волной расстояния z . Сразу за фазовым экраном, при малых z (или при $g \rightarrow 0$), функция Грина приобретает вид

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{\tau^2}{2\sigma^2} \right) \quad (18)$$

и решение (15)–(17) становится по форме таким же, как (8).

Для конкретной формы широкополосного сигнала $p_0(\tau)$ в виде N -волны (9) результаты расчета $\langle p^2 \rangle$ по формулам (15)–(17) имеют вид, изображенный на рис. 2. Обозначения кривых 1–7 соответствуют рис. 1. Расстояние z полагалось равным нулю, т. е. изображено поведение $\langle p^2 \rangle$ непосредственно за фазовым экраном.

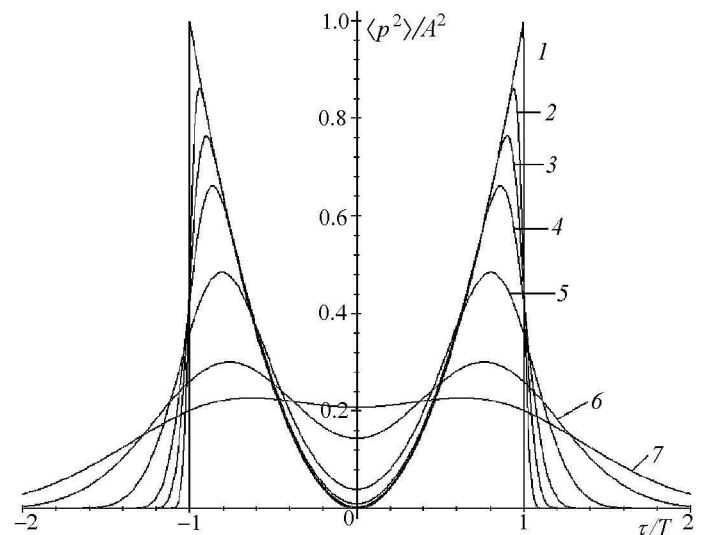


Рис. 2

Зависимости от времени профилей для нормированной дисперсии широкополосной волны давления

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{A^2} (\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2)$$

изображены на рис. 3: сразу за экраном, $z = 0$ (рис. 3, а), и на расстоянии $(2cT/a^2)z = 0.5$ от него (рис. 3, б). Здесь кривые 1–6 построены для значений параметра $\beta = 0.03, 0.06, 0.1, 0.2, 0.4$ и 0.6 соответственно. Асимметрия в поведении σ^2 при положительных и отрицательных значениях τ (рис. 3, б) возникает вследствие влияния дифракции.

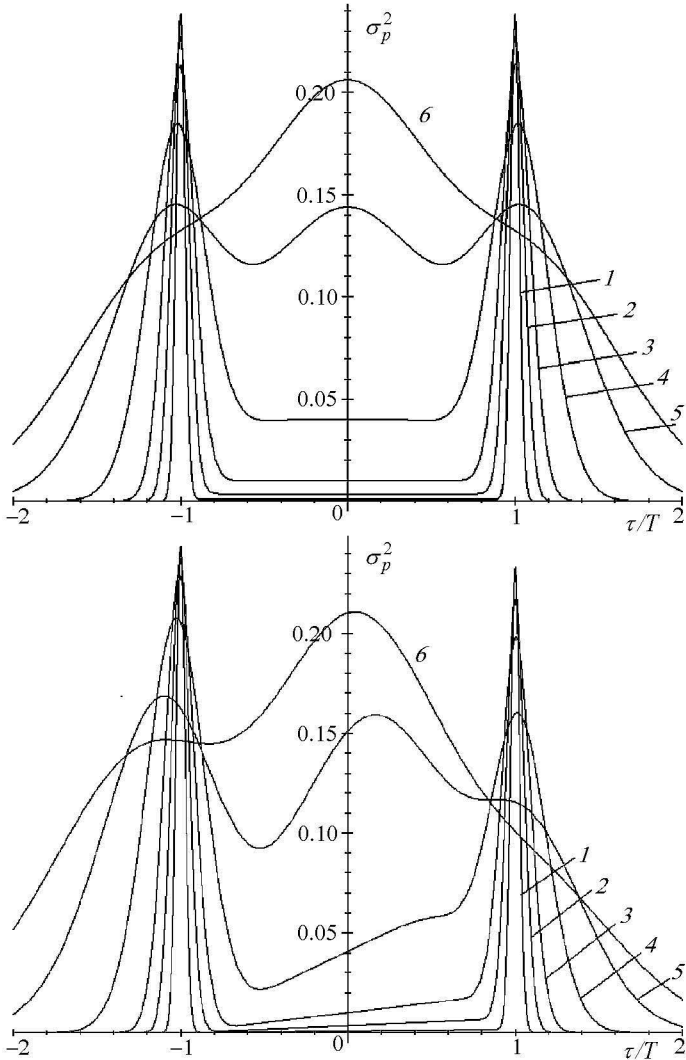


Рис. 3

В ряде приложений, в частности при оценке экологических последствий звуковых ударов, вызванных полетами сверхзвуковой авиации над населенными территориями, требуется информация о вероятности появления выбросов пикового давления, превышающих заданное пороговое значение. Такие расчеты были проведены в работе [4] в приближении нелинейной геометрической акустики, которое не описывает сильные флуктуации поля. Такие флуктуации происходят в результате «дифференцирования» ударноволнового профиля при прохождении области пересечения лучей.

Подход, развиваемый в настоящей работе, учитывает дифракционные явления и в принципе позво-

ляет «пройти» через области геометрических сингулярностей (фокусы, каустики) за фазовым экраном. Здесь мы ограничились расчетом средних значений пикового давления $\langle p_{\max} \rangle / A$, среднеквадратичного пикового давления $\langle p_{\max}^2 \rangle^{1/2} / A$ и дисперсии для p_{\max} : $\sigma_{\max} = \frac{1}{A} [\langle p_{\max}^2 \rangle - \langle p_{\max} \rangle^2]^{1/2}$. Зависимости этих величин от дисперсии флуктуаций фазы β изображены на рис. 4 (кривые 1–3 соответственно). Расчеты проведены на основе решений (10) и (15)–(17) при $z = 0$. Интересно отметить, что, несмотря на убывание средних значений (кривые 1 и 2) с ростом β , дисперсия σ_{\max} (кривая 3) растет, что свидетельствует о появлении больших выбросов пиковых давлений, измеряемых за фазовым экраном.

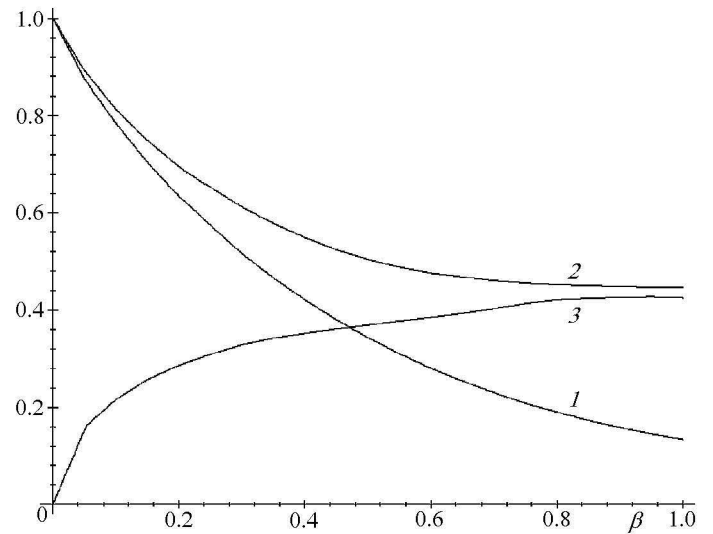


Рис. 4

Работа выполнена при поддержке CRDF (грант RP2-2099), INTAS (грант 99-88), РФФИ (грант 99-02-16042) и программы «Университеты России».

Литература

1. Руденко О.В., Солюян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. Руденко О.В. // УФН. 1986. **149**, №3. С. 413.
3. Руденко О.В., Сарвазян А.П. // Медицина и биотехнология. 2000. №3. С. 6.
4. Rudenko O.V., Enflo B.O. // Acustica. 2000. **86**. P. 229.
5. Pierce A.D. // J. Acoust. Soc. Am. 1968. **44**. P. 1052.
6. Дубровский А.Н., Руденко О.В., Хохлова В.А. // Акуст. журн. 1996. **42**, №5. С. 623.
7. Thomas J.L., Fink M.A. // IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectr. Freq. Control. 1996. **43**, No. 6. P. 1122.
8. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. 2-е изд. М.: Наука, 1990.

Поступила в редакцию
18.04.01