

УДК 519.246,524

## АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЕ ПОДАВЛЕНИЕ ШУМА ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ СЛАБЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ИМПУЛЬСОВ

А. В. Гусев

(ГАИШ)

E-mail: avg@sai.msu.su

**Предложен амплитудно-частотный алгоритм обнаружения слабых гравитационных импульсов на фоне негауссовских шумов резонансных гравитационных антенн. Обработка гравитационных данных проводится по схеме «безынерционный нелинейный элемент – оптимальный линейный фильтр – сумматор».**

1. При комплексной системе обработки информации [1], полученной с помощью криогенных резонансных гравитационных антенн (ГА), необходимо учитывать, что аддитивная помеха на выходе таких систем представляет собой негауссовский узкополосный случайный процесс. При обнаружении в одночастотном режиме слабых гравитационных импульсов (ГИ) по дискретной выборке с независимыми отсчетами можно использовать [2] локально оптимальный алгоритм обработки [3, 4] гравитационных данных по схеме «безынерционный нелинейный элемент (БНЭ) – сумматор». Характеристика БНЭ определяется одномерной плотностью вероятности помехи на выходе линейного тракта ГА.

В настоящей работе рассматривается возможность применения амплитудно-частотных методов подавления аддитивных шумов [4, 5] для обнаружения слабых ГИ. Обработка гравитационных данных проводится по схеме «БНЭ – оптимальная линейная система – сумматор». Характеристика БНЭ выбирается таким образом, чтобы обеспечить максимум отношения сигнал-шум на выходе такого устройства.

2. В состав современных резонансных ГА входит дополнительный элемент – трансформатор смещения. Такое устройство представляет собой механический аналог трансформатора импеданса в теории электрических цепей. При обобщенном анализе ГА с трансформатором смещения можно рассматривать как линейную систему с двумя степенями свободы. Результирующий процесс  $x(t)$  на выходе линейного тракта ГА представляет собой суперпозицию двух квазигармонических колебаний:

$$x_m(t) = \lambda s_m(t) + n_m(t), \quad t \in (0, T),$$

где  $\lambda$  – случайная величина, принимающая на интервале наблюдения  $(0, T)$  два возможных значения:  $\lambda = 1$  при наличии ГИ и  $\lambda = 0$  при их отсутствии,  $s_m(t)$  и  $n_m(t)$  – полезный сигнал и аддитивная помеха в одночастотном режиме,  $m = 1, 2$ . Начальные фазы узкополосных процессов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  считаются случайными величинами.

При амплитудно-частотном подавлении аддитивных помех обработке подвергается реализация векторного случайного процесса  $\mathbf{E}(t) = [E_1(t) E_2(t)]^T$ , где  $E_1(t)$  и  $E_2(t)$  – квадраты огибающих узкополосных процессов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ .

Пусть  $f[E_1, E_2]$  – двумерная характеристика БНЭ;  $W_2(E_1, E_2, A_1^2, A_2^2)$  – совместная плотность вероятности случайных процессов  $E_1(t)$  и  $E_2(t)$  в совпадающие моменты времени, зависящая (при случайных начальных фазах) только от огибающих  $A_1(t)$  и  $A_2(t)$  узкополосных колебаний  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ ;  $\langle \dots \rangle$  – символическая форма записи оператора статистического усреднения,

Тогда среднее значение случайного процесса  $y(t) = f[E_1(t), E_2(t)]$  на выходе БНЭ устройства определяется следующей формулой:

$$\langle y(t) | \lambda \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty f[E_1, E_2] W_2(E_1, E_2, \lambda A_1^2, \lambda A_2^2) dE_1 dE_2.$$

При обнаружении слабых ГИ, разлагая совместную плотность вероятности  $W_2(E_1, E_2, A_1^2, A_2^2)$  в ряд Тейлора по степеням малых энергетических параметров  $A_1^2$  и  $A_2^2$ , получим

$$\begin{aligned} \langle y(t) | \lambda \rangle &\approx \langle f[E_1, E_2] | \lambda = 0 \rangle + \\ &+ \lambda \sum_{m=1}^2 \langle A_m^2(t) \rangle \langle f[E_1, E_2] f_m[E_1, E_2] | \lambda = 0 \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$f_m[E_1, E_2] = \left[ \frac{\partial \ln W_2(E_1, E_2, A_1^2, A_2^2)}{\partial A_m^2} \right]_{A_1^2=A_2^2=0}. \quad (2)$$

При дальнейшем анализе будем предполагать, что  $\langle f[E_1, E_2] | \lambda = 0 \rangle = 0$  [4], а огибающие  $A_1(t)$  и  $A_2(t)$  в первом приближении одинаковы:  $A_1^2(t) \approx A_2^2(t) \approx A^2(t)$ . Учитывая выражения (1) и (2),

получим

$$\langle y(t)|\lambda \rangle \approx \lambda \langle A^2(t) \rangle \langle f[E_1, E_2] \gamma[E_1, E_2] | \lambda = 0 \rangle, \quad (3)$$

$$\gamma[E_1, E_2] = \sum_{m=1}^2 f_m[E_1, E_2].$$

Выражение (3) позволяет представить случайный широкополосный процесс  $y(t)$  на выходе БНЭ в виде линейной суперпозиции:

$$y(t) = \lambda s(t) + n(t), \quad t \in (0, T),$$

полезного сигнала  $s(t) = \langle y(t)|\lambda = 1 \rangle$  и аддитивной помехи  $n(t) \approx y(t)|\lambda = 0$  с нулевым средним значением и дисперсией  $D \approx \langle y^2(t)|\lambda = 0 \rangle = \langle f^2[E_1, E_2] | \lambda = 0 \rangle$ . Полезный сигнал  $s(t)$  сохраняет структуру огибающей  $A(t)$  отклика ГА на внешнее возмущение.

Учитывая выражение (3), находим отношение сигнал-шум  $q(t)$  (по мощности) на выходе БНЭ при однократном наблюдении:

$$q(t) = \frac{s^2(t)}{D} = \langle A^2(t) \rangle^2 \frac{\langle f[E_1, E_2] \gamma[E_1, E_2] | \lambda = 0 \rangle^2}{\langle f^2[E_1, E_2] | \lambda = 0 \rangle}.$$

При оптимальной характеристике БНЭ  $f[E_1, E_2] = \tilde{f}[E_1, E_2]$  отношение сигнал-шум  $q$  достигает максимальной величины  $q = q_{\max}$ . Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, получим

$$q(t) = q_{\max}(t) = \langle A^2(t) \rangle^2 I, \quad I = \langle \gamma^2[E_1, E_2] | \lambda = 0 \rangle,$$

$$\tilde{f}[E_1, E_2] = c_0 \gamma[E_1, E_2] = c_0 \sum_{m=1}^2 f_m[E_1, E_2], \quad (4)$$

где  $c_0$  — произвольный масштабный коэффициент (при дальнейшем анализе  $c_0 = 1$ ).

**3.** При гауссовских шумах на выходе линейного тракта ГА случайные процессы  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  статистически независимы. Поэтому при гауссовской модели аддитивных помех совместная плотность вероятности  $W_2(E_1, E_2, A_1^2, A_2^2)$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} [W_2(E_1, E_2, A_1^2, A_2^2)]_{\text{Gauss}} = \\ = W_1(E_1, A_1^2, \sigma_1^2) W_1(E_2, A_2^2, \sigma_2^2), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\sigma_1^2 = \langle n_1^2(t) \rangle$  и  $\sigma_2^2 = \langle n_2^2(t) \rangle$  — дисперсии гауссовских случайных процессов  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$ ,

$$\begin{aligned} W_1(E, A^2, \sigma^2) = \\ = (2\sigma^2)^{-1} \exp \left\{ -(E + A^2)/(2\sigma^2) \right\} I_0 \left( A\sqrt{E}/\sigma^2 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

— плотность вероятности Релея-Райса:  $I_0(x) = 1 + x^2/4 + \dots$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Для негауссовских случайных процессов  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  совместная плотность вероятности  $W_2(E_1, E_2, A_1^2, A_2^2)$  неизвестна. При адаптивном приеме в условиях априорной недостаточности характеристика БНЭ может быть вычислена по параметрической оценке этой плотности вероятности. Учитывая формулу (5) и воспользовавшись методом рандомизации [6], находим оценку неизвестной плотности вероятности  $W_2(E_1, E_2, A_1^2, A_2^2)$  при полигауссовской аппроксимации [3]:

$$\begin{aligned} \widehat{W}_2(E_1, E_2, A_1^2, A_2^2) = \\ = \sum_l p_l W_1(E_1, A_1^2, \sigma_{1l}^2) W_1(E_2, A_2^2, \sigma_{2l}^2), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $0 \leq p_l \leq 1$  — весовые коэффициенты,  $\sum_l p_l = 1$ ,  $\sigma_{1l}^2$  и  $\sigma_{2l}^2$  — характерные параметры.

Учитывая выражения (2), (5), (6) и (7), при полигауссовской аппроксимации плотности вероятности шума на выходе ГА получим

$$\begin{aligned} f_m[E_1, E_2] = \\ = \left\{ \sum_l p_l W_1(E_1, 0, \sigma_{1l}^2) W_1(E_2, 0, \sigma_{2l}^2) (2\sigma_{ml}^2)^{-1} \times \right. \\ \left. \times [E_m / (2\sigma_{ml}^2) - 2] \right\} \times \\ \times \left[ \sum_l p_l W_1(E_1, 0, \sigma_{1l}^2) W_1(E_2, 0, \sigma_{2l}^2) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Формула (8) определяет структуру нелинейных преобразователей в отдельных каналах двухканального БНЭ с оптимальной характеристикой. Параметры плотности вероятности (7) при обнаружении слабых ГИ можно найти по неклассифицированным реализациям случайных процессов  $E_1(t)$  и  $E_2(t)$ .

При бигауссовской аппроксимации ( $l = 2$ ) аддитивная помеха на выходе линейного тракта ГА рассматривается как аномально-засоренный гауссовский случайный процесс. Характерные параметры такого процесса  $\sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{21}^2, \sigma_{22}^2, p_1 = (1 - p), p_2 = p$ , где  $p$  — вероятность появления аномалии в произвольный момент времени, можно определить [3] по выборочным начальным моментам  $m_\nu^* \{E_{1,2}\}$ ,  $\nu = 1, 2, 3$ , случайных процессов  $E_1(t)$  и  $E_2(t)$ .

**4.** Пусть

$$\tilde{y}(t) = \tilde{f}[E_1(t), E_2(t)] = \lambda \tilde{s}(t) + \tilde{n}(t), \quad t \in (0, T),$$

— случайный процесс на выходе БНЭ с оптимальной характеристикой (4), представляющий собой аддитивную смесь полезного сигнала  $\tilde{s}(t)$  и стационарной помехи  $\tilde{n}(t)$ . При амплитудно-частотной обработке реализация этого случайного процесса

поступает на вход оптимальной линейной системы, максимизирующей отношение сигнал-шум [4, 7]. Передаточная функция  $K_\omega(j\omega)$  такой системы определяется следующим выражением:

$$K_\omega(j\omega) = K_0 [\tilde{s}_\omega^*(j\omega)/B(\omega)] \exp \{-j\omega t_d\}, \quad (9)$$

где  $\tilde{s}_\omega(j\omega) \leftrightarrow \tilde{s}(t)$ ,  $B(\omega)$  — спектральная плотность аддитивной помехи  $\tilde{n}(t)$ ,  $K_0$  — произвольный масштабный коэффициент,  $t_d$  — временная задержка.

Будем предполагать, что гравитационный сигнал на входе ГА представляет собой последовательность редких  $\delta$ -импульсов со случайными независимыми амплитудами и моментами возникновения  $\tau_k$ . Для оценки априори неизвестных параметров  $\tau_k$  при поиске гамма-гравитационной корреляции используется комплексная система обработки информации [1]. Для такой модели полезного сигнала имеем  $A(t) = a_k \sum_k g_0(t - \tau_k)$ , где  $g_0(t)$  — нормированная огибающая импульсной характеристики линейного тракта ГА в одночастотном режиме,  $0 \leq g_0(t) \leq g_0(0) = 1$ ,  $a_k$  — амплитуда отдельного ГИ. Тогда, учитывая выражение (3), находим:

$$\tilde{s} = \sum_k \tilde{s}_k(t), \quad \tilde{s}_k(t) = \langle a_k^2 \rangle I g_0^2(t - \tau_k).$$

Учитывая, что передаточная функция оптимальной системы определена с точностью до произвольного масштабного коэффициента, из выражения (9) получим

$$K_\omega(j\omega) = K_{1\omega}(j\omega) K_{2\omega}(j\omega). \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_{1\omega}(j\omega) &= K_0 \frac{u_\omega^*(j\omega)}{B(\omega)} \exp \{-j\omega t_d\}, \\ K_{2\omega}(j\omega) &= \sum_k \exp \{-j\omega \tau_k\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из анализа выражений (10) и (11) следует, что при амплитудно-частотном обнаружении слабых ГИ оптимальная линейная система на выходе БНЭ может быть реализована в виде последовательно включенных оптимального линейного фильтра (ОФ) с передаточной функцией  $K_{1\omega}(j\omega)$  и сумматора с передаточной функцией  $K_{2\omega}(j\omega)$ . ОФ максимизирует отношение сигнал-шум при обнаружении отдельного ГИ. При оптимальном моменте наблюдения  $t = t_d$  [4] случайный процесс на выходе оптимальной системы достигает величины  $Z = \sum_k z(\tau_k)$ , где  $z(t) = y_{\text{opt}}(t) * K_1(t)$  — случайный процесс на выходе ОФ с импульсной характеристикой  $K_1(t) \leftrightarrow K_{1\omega}(\omega)$ .

Применение дополнительного ОФ, расположенного после БНЭ, позволяет увеличить отношение сигнал-шум относительно системы [2] без

ОФ. Коэффициент относительной эффективности модифицированного алгоритма обработки гравитационных данных  $\rho$  определяется формулой  $\rho = \sqrt{q_{\text{opt}}/q_{\text{max}}(\tau_k)} \geq 1$ , где  $q_{\text{opt}}$  — отношение сигнал-шум на выходе ОФ для отдельного ГИ [4, 7]:

$$q_{\text{opt}} = \pi^{-1} \int_0^\infty |g_{0\omega}^2(j\omega)|^2 d\omega / B(\omega), \quad g_{0\omega}^2(j\omega) \leftrightarrow g_0^2(t),$$

$q_{\text{max}}(t)$  — отношение сигнал-шум (4) на выходе БНЭ с оптимальной характеристикой.

5. В теории оптимального приема для обнаружения слабого сигнала на фоне негауссовской помехи с независимыми значениями используются локально оптимальный [3, 4] и асимптотически оптимальный [3, 4, 8] алгоритмы. Такие алгоритмы можно применить и при коррелированной помехе на выходе ГА [2], если предположить, что обработке подвергается дискретная выборка с независимыми элементами. Характеристика БНЭ при таком подходе определяется оценкой одномерной плотности вероятности огибающей аддитивной помехи.

При амплитудно-частотном подавлении шума характеристика БНЭ для произвольной негауссовской помехи выбирается таким образом, чтобы обеспечить максимальную величину отношения сигнал-шум на выходе БНЭ. Характеристики БНЭ, построенные в соответствии с локально оптимальным алгоритмом обнаружения и алгоритмом амплитудно-частотного подавления, совпадают. Новым элементом схемы при амплитудно-частотном подавлении оказывается наличие ОФ. В условиях априорной неопределенности передаточная функция адаптивного ОФ зависит от непараметрической оценки [6] спектральной плотности шума на выходе БНЭ.

В заключение отметим следующее.

1. При наличии негауссовских шумов случайные процессы  $E_1(t)$  и  $E_2(t)$  статистически зависимы:

$$W_2(E_1, E_2, 0, 0) \neq W_{11}(E_1, 0) W_{12}(E_2, 0),$$

где  $W_{1m}(E_m, 0)$  — одномерная плотность вероятности случайного процесса  $E_m(t)$ ,  $m = 1, 2$ , при отсутствии ГИ.

2. Целесообразность обработки сигнала ГА по схеме «БНЭ — ОФ — сумматор» (вместо более простой [2] схемы «БНЭ — сумматор») можно определить только апостериори, после построения непараметрической оценки  $\hat{B}(\omega)$  неизвестной спектральной плотности  $B(\omega)$  на выходе БНЭ.

3. Частотно-амплитудная обработка выходного сигнала ГА по схеме «обесцвечивающий фильтр — БНЭ — согласованный фильтр» (т.е. включение БНЭ после обесцвечивающего фильтра) оказывается [4] менее эффективным, чем размещение БНЭ на входе оптималь-

ной линейной системы при амплитудно-частотном подавлении аддитивной помехи.

4. Применение критерия максимума отношения сигнал-шум при  $A_1(t) \neq A_2(t)$  (огibaющие полезных сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  в отдельных модах заметно отличаются) не позволяет однозначно определить оптимальную характеристику БНЭ.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-02-17884).

#### Литература

1. Виноградов М.П., Гусев А.В., Милуков В.К. // Радиотехн. и электроника. 1988. **43**, № 6. С. 692.
2. Гусев А.В., Милуков В.К. // Радиотехн. и электроника. 2000. **45**, № 4. С. 234.

3. Шелухин О.И. Негауссовские процессы в радиотехнике. М.: Радио и связь, 1999.
4. Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. и др. Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984.
5. Валеев В.Г., Гонопольский В.Б. // Радиотехн. и электроника. 1981. **26**, № 11. С. 2301.
6. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
7. Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992.
8. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.

Поступила в редакцию  
14.05.01

## АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 534.222

### ГЕНЕРАЦИЯ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ И АКУСТИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Е. М. Баллад, Б. А. Коршак, В. Г. Можаяев, И. Ю. Солодов

(кафедра акустики)

E-mail: balade@mail.ru

Методом вариации постоянной решено уравнение движения частиц в твердом теле в приближении девятиконстантной теории упругости. Получены выражения, описывающие генерацию третьей гармоники на квадратичной и кубической нелинейности твердой среды. Предложена методика определения нелинейных параметров генерации третьей гармоники. Экспериментально исследована генерация второй и третьей гармоник поверхностных акустических волн в кристалле  $\text{LiNbO}_3$  и на контактной границе твердых тел. Выполнены оценки величин нелинейных параметров генерации и эффективных комбинаций упругих модулей четвертого порядка исследованного материала.

#### Введение

Исследования нелинейных акустических явлений в твердом теле обычно связаны с определением отклонений силы упругости идеальной решетки от закона Гука. При малых деформациях такие отклонения незначительны, и поэтому в подавляющем большинстве работ ограничиваются квадратичными поправками в уравнении состояния твердого тела, ответственными за генерацию второй акустической гармоники [1]. Однако в последнее время внимание привлечено к новым типам аномально высокой упругой нелинейности, характерной для тел, обладающих микроструктурой или дефектами сплошности (трещины, поры, отслоения и т.п.). Нелинейные эффекты, проявляющиеся в таких телах, могут служить источником информации о структуре твердого тела. В этой связи особую актуальность приобретает развитие теории нелинейных взаимодействий высших порядков и определение нелинейных параметров таких взаимодействий для последующей

количественной их оценки. Генерация третьей гармоники рассматривалась в относительно немногих теоретических [2, 3] и экспериментальных [4, 5] работах. При этом не было уделено достаточного внимания определению нелинейного параметра генерации и сравнительным вкладам нелинейностей различных порядков в его величину.

В настоящей работе получены выражения, описывающие пространственные и динамические характеристики генерации третьей гармоники в заданном поле основной волны без учета ее поглощения, и предложена методика определения нелинейных параметров генерации третьей гармоники. Также приводятся результаты экспериментальных исследований процессов генерации второй и третьей гармоник поверхностных акустических волн. Определены пространственные и динамические характеристики эффектов. Динамические характеристики анализируются для двух типов нелинейности: собственной нелинейности материала (так называемой матери-