

ной линейной системы при амплитудно-частотном подавлении аддитивной помехи.

4. Применение критерия максимума отношения сигнал-шум при  $A_1(t) \neq A_2(t)$  (огibaющие полезных сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  в отдельных модах заметно отличаются) не позволяет однозначно определить оптимальную характеристику БНЭ.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-02-17884).

#### Литература

1. Виноградов М.П., Гусев А.В., Милуков В.К. // Радиотехн. и электроника. 1988. **43**, № 6. С. 692.
2. Гусев А.В., Милуков В.К. // Радиотехн. и электроника. 2000. **45**, № 4. С. 234.

3. Шелухин О.И. Негауссовские процессы в радиотехнике. М.: Радио и связь, 1999.
4. Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. и др. Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984.
5. Валеев В.Г., Гонопольский В.Б. // Радиотехн. и электроника. 1981. **26**, № 11. С. 2301.
6. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
7. Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992.
8. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.

Поступила в редакцию  
14.05.01

## АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 534.222

### ГЕНЕРАЦИЯ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ И АКУСТИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Е. М. Баллад, Б. А. Коршак, В. Г. Можаяев, И. Ю. Солодов

(кафедра акустики)

E-mail: balade@mail.ru

Методом вариации постоянной решено уравнение движения частиц в твердом теле в приближении девятиконстантной теории упругости. Получены выражения, описывающие генерацию третьей гармоники на квадратичной и кубической нелинейности твердой среды. Предложена методика определения нелинейных параметров генерации третьей гармоники. Экспериментально исследована генерация второй и третьей гармоник поверхностных акустических волн в кристалле  $\text{LiNbO}_3$  и на контактной границе твердых тел. Выполнены оценки величин нелинейных параметров генерации и эффективных комбинаций упругих модулей четвертого порядка исследованного материала.

#### Введение

Исследования нелинейных акустических явлений в твердом теле обычно связаны с определением отклонений силы упругости идеальной решетки от закона Гука. При малых деформациях такие отклонения незначительны, и поэтому в подавляющем большинстве работ ограничиваются квадратичными поправками в уравнении состояния твердого тела, ответственными за генерацию второй акустической гармоники [1]. Однако в последнее время внимание привлечено к новым типам аномально высокой упругой нелинейности, характерной для тел, обладающих микроструктурой или дефектами сплошности (трещины, поры, отслоения и т.п.). Нелинейные эффекты, проявляющиеся в таких телах, могут служить источником информации о структуре твердого тела. В этой связи особую актуальность приобретает развитие теории нелинейных взаимодействий высших порядков и определение нелинейных параметров таких взаимодействий для последующей

количественной их оценки. Генерация третьей гармоники рассматривалась в относительно немногих теоретических [2, 3] и экспериментальных [4, 5] работах. При этом не было уделено достаточного внимания определению нелинейного параметра генерации и сравнительным вкладам нелинейностей различных порядков в его величину.

В настоящей работе получены выражения, описывающие пространственные и динамические характеристики генерации третьей гармоники в заданном поле основной волны без учета ее поглощения, и предложена методика определения нелинейных параметров генерации третьей гармоники. Также приводятся результаты экспериментальных исследований процессов генерации второй и третьей гармоник поверхностных акустических волн. Определены пространственные и динамические характеристики эффектов. Динамические характеристики анализируются для двух типов нелинейности: собственной нелинейности материала (так называемой матери-

альной нелинейности) и контактной акустической нелинейности. Даны количественные оценки нелинейных параметров генерации высших гармоник и комбинации упругих модулей четвертого порядка для кристалла  $\text{LiNbO}_3$ . Проведен сравнительный анализ полученных нелинейных параметров для случаев материальной и контактной нелинейности.

### 1. Генерация третьей гармоники в изотропном твердом теле

Для плоской продольной волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , уравнение движения частиц в твердом теле имеет вид [1]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right), \quad (1)$$

где  $U$  — внутренняя энергия твердого тела,  $u$  — смещение,  $\rho$  — плотность недеформированного тела.

Разлагая  $U$  в ряд по компонентам тензора деформаций  $u_{ik}$  с точностью до членов четвертого порядка малости и считая тело изотропным, получим из (1) уравнение движения, описывающее нелинейные эффекты для продольных упругих волн с учетом кубической нелинейности:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f' + f''. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha = K + \frac{4}{3}\mu$  — комбинация линейных модулей упругости, а  $f'$  и  $f''$  определяются комбинациями упругих модулей третьего ( $A, B, C$ ) и четвертого ( $D, G, H, J$ ) порядка:

$$f' = \beta \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right], \quad f'' = \tau \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right],$$

где  $\beta = 3K + 4\mu + 2A + 6B + 2C$ ,  $\tau = \frac{3}{2}K + 2\mu + 6A + 18B + 6C + 12(D + G + H + J)$ .

Применяя стандартную методику последовательных приближений, представляем вектор смещения частиц в виде

$$u = u_1 + u_2 + u_3,$$

где  $u_1 \gg u_2 \gg u_3$  — векторы смещения в первом, втором и третьем приближении соответственно.

Используя решение уравнения первого приближения  $u_1 = u_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} + \text{к.с.}$  в уравнениях второго и третьего приближения, из (2) получим два неоднородных уравнения Гельмгольца:

$$u_i'' - k_i^2 u_i = F_i(x),$$

где  $u_i, k_i$  — величина смещения и волновое число соответствующей гармоники, а  $F_i(x)$  для уравнений

второго и третьего приближения имеют соответственно вид

$$F_2 = \beta \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (3)$$

и

$$F_3 = \tau \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \beta \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right). \quad (4)$$

Решение уравнений будем искать методом вариации постоянной: с помощью двух последовательных замен переменных вида  $u_i = C(x) e^{ik_i x}$  получаем в аналитическом виде решение неоднородного уравнения Гельмгольца как двойной интеграл от правой части:

$$u_i = \left\{ \int \left[ \int F_i(x) e^{-ik_i x} dx \right] e^{2ik_i x} dx \right\} e^{-ik_i x}. \quad (5)$$

Так, для уравнения второго приближения, вычисляя правую часть (3) и подставляя ее в (5), после интегрирования получим

$$u_2 = \left\{ -\frac{i u_0^2 k_0^3 \beta}{2\alpha (2k_0 + k_2)(2k_0 - k_2)} e^{i2k_0 x} + C_+ e^{ik_2 x} + C_- e^{-ik_2 x} \right\}.$$

Постоянная  $C_-$  равна нулю для волн, бегущих вдоль положительного направления оси. Для определения  $C_+$  используем стандартное граничное условие  $u_2 = 0$  при  $x = 0$ . Совершая далее предельный переход в отсутствие дисперсии при  $k_2 \rightarrow 2k_0$ , для амплитуды второй гармоники получим известную формулу

$$u_2^0 = -\frac{\beta}{8\alpha} k_0^2 u_0^2 x. \quad (6)$$

Аналогично, вычислив правую часть (4) с использованием выражений для  $u_1$  и  $u_2$  и совершая после интегрирования (5) предельный переход при отсутствии дисперсии  $k_3 \rightarrow 3k_0$ , для амплитуды третьей гармоники найдем:

$$u_3^0 = \frac{\beta^2 u_0^3 k_0^4 x^2}{32\alpha^2} \left\{ 1 + \frac{16}{9k_0^2 x^2} \left[ \frac{\alpha\tau}{\beta^2} \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (7)$$

Введем теперь нелинейные параметры генерации гармоник, определяющие эффективность генерации, величина которых должна зависеть только от свойств материала. Характерно, что некоторая неоднозначность в определении нелинейных параметров твердых тел существует даже для второй гармоники. Дело в том, что параметр квадратичной нелинейности определяется отношением квадратичных и линейных членов либо в уравнении движения [2], либо в уравнении состояния [6]. Второй подход

обычно также используется в нелинейной акустике газов и жидкостей, поэтому для сохранения общности мы будем его придерживаться. С учетом кубических членов в уравнении состояния имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} = \alpha \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\beta}{2\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\tau}{3\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 \right]. \quad (8)$$

Тогда нелинейный параметр генерации второй гармоники в соответствии с (8) и (6) будет определяться следующим образом [1]:

$$\Gamma_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{4u_2^0}{u_0^2 k_0^2 x}, \quad (9)$$

а выражение для параметра кубической нелинейности будет соответственно иметь вид  $\Gamma_3 = \tau/3\alpha$ .

Введем обозначение:

$$\eta = \frac{16}{9k_0^2 x^2} \left[ \frac{\alpha\tau}{\beta^2} \right]^2 = \left( \frac{\Gamma_3}{\Gamma_2^2 k_0 x} \right)^2. \quad (10)$$

Величина  $\eta$  характеризует относительные вклады кубической и квадратичной нелинейности в процесс генерации третьей гармоники. С использованием (10) выражение для амплитуды третьей гармоники (7) переписывается в виде

$$u_3^0 = \frac{\Gamma_2^2 u_0^3 k_0^4 x^2}{8} \{1 + \eta\}^{1/2}. \quad (11)$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. Величина  $\eta \gg 1$ . Поскольку для материальной нелинейности можно считать  $\alpha\tau/\beta^2 \sim 10$  [7], то условие  $\eta \gg 1$ , как видно из (10), может реализоваться лишь на небольших расстояниях от излучателя. С другой стороны, для характерных в эксперименте величин  $k_0 x \sim 10^2 - 10^3$  режим  $\eta \gg 1$  может иметь место при  $\alpha\tau \gg \beta^2$ , т.е. при аномально высокой кубической нелинейности по сравнению с квадратичной нелинейностью. Формула (11) в этом случае принимает вид

$$u_3^0 = \frac{\tau}{24\alpha} u_0^3 k_0^3 x = \frac{\Gamma_3}{8} u_0^3 k_0^3 x. \quad (12)$$

Тогда соответствующий нелинейный параметр генерации третьей гармоники определяется следующим образом:

$$\Gamma_3 = \frac{\tau}{3\alpha} = \frac{8u_3^0}{u_0^3 k_0^3 x}. \quad (13)$$

Формула (12) описывает генерацию третьей гармоники на кубической нелинейности.

2. Величина  $\eta \ll 1$ . В этом случае вкладом кубической нелинейности можно пренебречь, и из (11) получим

$$u_3^0 = \frac{\beta^2}{32\alpha^2} u_0^3 k_0^4 x^2 = \frac{\Gamma_2^2}{8} u_0^3 k_0^4 x^2. \quad (14)$$

Формула (14) описывает генерацию третьей гармоники на квадратичной нелинейности. Нелинейный параметр генерации третьей гармоники в этом случае равен квадрату нелинейного параметра квадратичной нелинейности (9).

При  $\eta \sim 1$  пространственные характеристики генерации третьей гармоники даются полным выражением (11), и выделить в этом случае нелинейный параметр, зависящий только от параметров материала, не представляется возможным.

## 2. Экспериментальное исследование генерации высших гармоник

Экспериментальное изучение генерации высших гармоник проводилось для поверхностных акустических волн (ПАВ) частотой 15 МГц в подложке  $YZ$ -среза кристалла  $\text{LiNbO}_3$ . ПАВ основной частоты возбуждались с помощью встречно-штыревых преобразователей в импульсном режиме. Для приема высших гармоник использовались преобразователи с резонансными частотами 30 и 45 МГц, а также специально сконструированный подвижный электрический зонд. Дальнейшее усиление сигналов на частотах высших гармоник осуществлялось с помощью полосовых усилителей, на входе которых с целью подавления основного сигнала устанавливались соответствующие фильтры. Электрический зонд представлял собой тонкую проводящую пластину с апертурой 1 см и толщиной зондирующего острия  $d \approx 5$  мкм. Зонд располагался перпендикулярно направлению распространения ПАВ и регистрировал потенциал на поверхности кристалла. Поскольку толщина зонда удовлетворяет условию  $d \ll \lambda_i$ , где  $\lambda_i$  — длины волн регистрируемых гармоник ( $\lambda_{30} \cong 120$  мкм,  $\lambda_{45} \cong 80$  мкм), то зонд является широкополосным приемником ПАВ.

Полученные с помощью электрического зонда распределения амплитуд второй и третьей гармоник ПАВ по длине образца показаны на рис. 1 в двойном логарифмическом масштабе. Значение углового коэффициента прямой на рис. 1, а составило  $1.1 \pm 0.1$ , что позволяет говорить о линейном росте амплитуды второй гармоники с расстоянием. Для третьей гармоники аналогичный угловой коэффициент наклона на начальном участке близок к единице, а по мере удаления от излучателя увеличивается и становится равным  $2.1 \pm 0.2$ . Таким образом, в соответствии с изложенной выше теорией генерации третьей гармоники экспериментально реализуются два предельных случая, вытекающие из формулы (11). Вблизи излучателя реализуется режим  $\eta \gg 1$ , при котором генерация третьей гармоники обусловлена кубической нелинейностью и характеризуется линейным по координате ростом

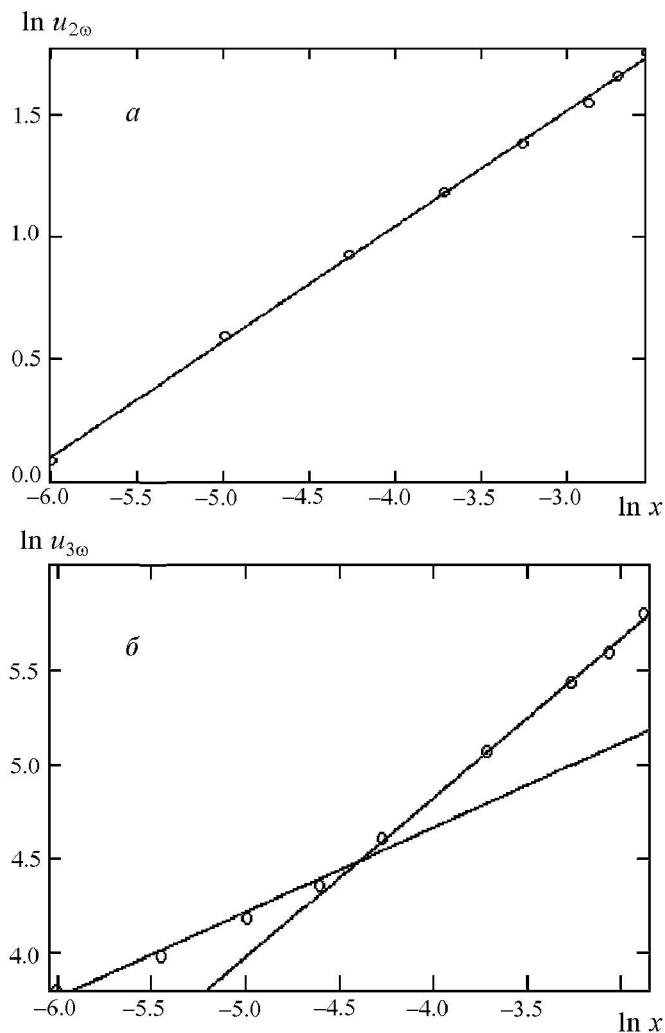


Рис. 1. Пространственные характеристики генерации второй (а) и третьей (б) гармоник: о — эксперимент, — — расчет по методу наименьших квадратов

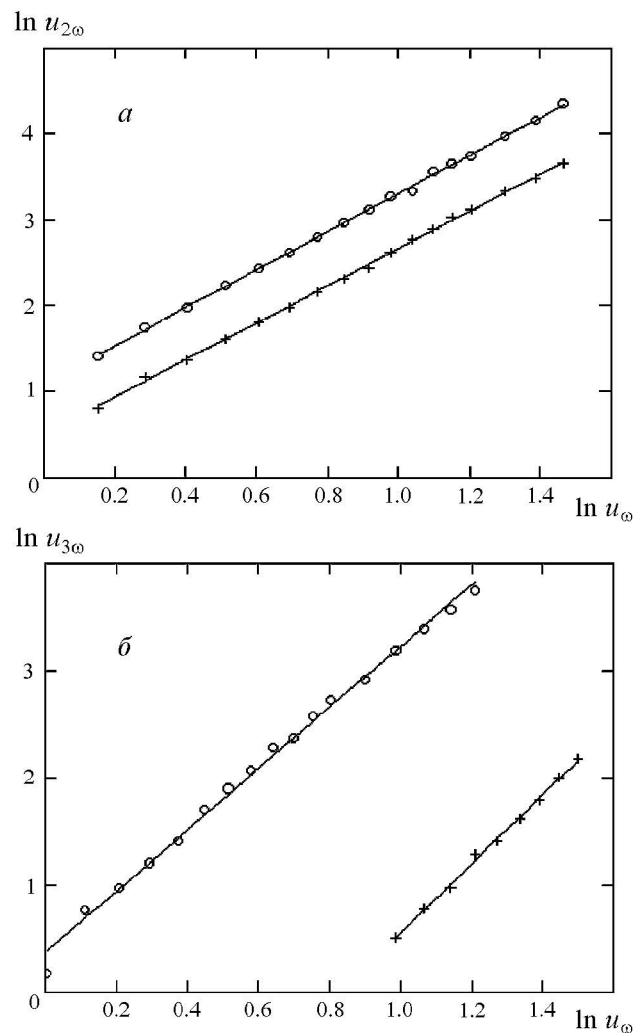


Рис. 2. Динамические характеристики второй (а) и третьей (б) гармоник при материальной (+) и контактной (о) нелинейности, — — расчет по методу наименьших квадратов

гармоники. По мере удаления от излучателя  $\eta \rightarrow 0$  и имеет место другой предельный случай — доминирующая квадратичная нелинейность с присущим ей квадратичным по координате ростом амплитуды третьей гармоники.

Динамические характеристики генерации второй и третьей гармоник ПАВ в  $YZ$ -срезе кристалла  $\text{LiNbO}_3$  исследовались для двух типов нелинейности: собственной нелинейности материала и так называемой контактной акустической нелинейности (КАН) [8]. КАН обусловлена нелинейной динамикой «несклеенной» контактной границы, упругость которой, очевидно, различна при сжатии и растяжении. Вследствие этого такая «разномодульная» граница является эффективным источником нелинейности. Для моделирования КАН в эксперименте к поверхности подложки  $\text{LiNbO}_3$  прижимались тщательно отполированные образцы стекла. При этом наблюдалось резкое увеличение амплитуд гармоник, обусловленное КАН.

Результаты исследований для случаев материальной и контактной нелинейности (рис. 2) позво-

ляют заключить, что амплитуды второй и третьей гармоник являются соответственно квадратичной и кубической функциями амплитуды волны основной частоты.

Экспериментально определенные степенные зависимости как пространственных, так и динамических характеристик находятся в хорошем соответствии с выражениями (9) и (13). С использованием этих выражений были проведены количественные оценки нелинейных параметров генерации высших гармоник. При исследовании динамических характеристик для каждого значения входного напряжения на преобразователе основной частоты определялись абсолютные величины смещений ПАВ основной частоты и высших гармоник по измерениям потерь на преобразование. Таким образом, нелинейный параметр генерации второй гармоники может быть рассчитан непосредственно из формулы (9) для каждой точки на рис. 2, а. Для кристалла  $\text{LiNbO}_3$  усредненное значение этого параметра составило  $\Gamma_2 = 1.8 \pm 0.5$ , что хорошо соответствует опубликованным ранее данным [9].

Для оценки величины  $\Gamma_3$  и соответствующей комбинации нелинейных упругих модулей четвертого порядка  $\tau$  кристалла  $\text{LiNbO}_3$  используем тот факт, что в точке пересечения прямых, изображенных на рис. 1, б, выполняется условие равенства вкладов кубической и квадратичной нелинейности. Другими словами, на соответствующем расстоянии  $x$  между излучателем и приемником выполняется условие  $\eta = 1$ . Зная  $k_0$ ,  $\Gamma_2$  и  $x$ , по формуле (10) можно рассчитать  $\Gamma_3$ . В результате получим:  $\Gamma_3 = 140 \pm 30$ . Полагая далее  $\alpha = \rho c^2$  ( $c \cong 3 \cdot 10^3$  м/с), оценим величину эффективной комбинации модулей упругости четвертого порядка для  $\text{LiNbO}_3$ :  $\tau = 3\alpha\Gamma_3 = (2.4 \pm 0.5) \cdot 10^{13}$  Н/м<sup>2</sup>. Это значение по порядку величины согласуется с данными по модулям упругости четвертого порядка для твердых тел, имеющимися в литературе [10].

Аналогичную методику можно применить для сравнительной оценки эффективности генерации высших гармоник при наличии КАН. В этом случае область КАН определяется размером оптического контакта образцов; в различных экспериментах оно составляло  $x \cong 3-5$  мм.

Так, используя данные, приведенные на рис. 2, а, получаем, что при наличии КАН  $\Gamma_{2\text{кан}} = 12 \pm 3$ ; это значительно превышает соответствующую величину для собственной нелинейности подложки. Подставляя значение  $\Gamma_{2\text{кан}}$  в формулу (10) и используя результаты измерений амплитуды третьей гармоники при наличии КАН (см. рис. 2, б), получаем величину  $\eta$  для условий нашего эксперимента:  $\eta \approx 25$ . Следовательно, вклад кубической нелинейности в процесс генерации третьей гармоники существенно выше вклада квадратичной. В случае доминирующей кубической нелинейности параметр генерации третьей гармоники определяется согласно (13). Вычисления показывают, что при наличии КАН  $\Gamma_{3\text{кан}} = (2 \pm 0.4) \cdot 10^5$ . Следует отметить, что третья гармоника существенно более чувствительна, нежели вторая, к наличию КАН: при существовании КАН нелинейный параметр генерации третьей гармоники более чем на три порядка выше, чем в условиях материальной нелинейности, тогда как аналогичный параметр для второй гармоники уве-

личивается при наличии КАН лишь приблизительно в 5 раз.

Найденные оценки позволяют заключить, что традиционное соотношение между амплитудами высших гармоник, характерное для однородных тел, не выполняется при наличии КАН. Это согласуется с полученными ранее экспериментальными данными по исследованию генерации гармоник трещиноподобными дефектами [11], в которых нелинейные контактные явления, безусловно, должны играть определяющую роль. Такой результат свидетельствует о том, что амплитуды высших гармоник могут служить источником информации о микроструктуре твердых тел. В практическом плане это подчеркивает важность реализации нелинейной акустодиагностики именно на высших гармониках основной частоты.

## Литература

1. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.
2. Van Den Abeele K., Breazeale M.A. // J. Acoust. Soc. Am. 1996. **99**, No. 3. P. 1430.
3. Thurston R.N., Shapiro M.J. // J. Acoust. Soc. Am. 1967. **41**, No. 4. P. 1112.
4. Peters R.D., Breazeale M.A. // Appl. Phys. Lett. 1968. **12**, No. 4. P. 106.
5. Na J.K., Breazeale M.A. // J. Acoust. Soc. Am. 1994. **95**, No. 6. P. 3213.
6. Наугольных К.А., Островский Л.А. Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990.
7. Конюхов Б.А., Шалашов Г.М. // Журн. прикл. матем. и теор. физики. 1974. № 4. С. 125.
8. Ко Сел Лен, Северин Ф.М., Солодов И.Ю. // Акуст. журн. 1991. **37**, № 6. С. 1165.
9. Солодов И.Ю. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М. (МГУ), 1989.
10. Gerlich D., Breazile M.A. // J. Appl. Phys. 1990. **67**, No. 7. P. 3278.
11. Ко Сел Лен, Солодов И.Ю. // Акуст. журн. 1993. **39**, № 5. С. 904.

Поступила в редакцию  
01.06.01