

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958; 621.372.8

**О ЛОВУШЕЧНЫХ МОДАХ ВОЛНОВЕДУЩИХ СИСТЕМ**

**А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, М. Д. Малых**

(кафедра математики)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

**Приведены примеры волноводов, имеющих ловушечные моды с заданной собственной частотой. Доказана возможность существования собственных частот, лежащих выше нижней границы непрерывного спектра.**

Возможность существования собственных значений  $u$  задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ \int_{\Omega} d\tau u^2 < \infty \end{cases} \quad (1)$$

в неограниченных областях  $\Omega$  типа волновода была доказана еще в 1948 г. [1]. Однако общая теория точечного спектра таких задач далека от завершения. Существование подобных собственных значений представляет значительный интерес, поскольку каждому из них отвечает собственная функция, локализованная вблизи неоднородности (ловушечная мода) [2]. Особенно трудно исследовать точки точечного спектра, вложенные в непрерывный спектр (см. [2–8]). Можно, однако, построить целый класс волноведущих областей, в которых задача (1) имеет заданное собственное значение  $\lambda$ .

В самом деле, пусть  $\lambda > 0$  — заданное число. Тогда волноводы, обладающие заданным собственным значением  $\lambda$ , можно построить как области между узловыми линиями функции  $u(x, y)$ , которая является решением на множестве

$$\mathbb{R}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \geq 0\}$$

вспомогательной задачи

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ u|_{y=0} = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x, y)^2 < \infty \quad \forall y \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Ее общее решение можно выписать, применив к ней преобразование Фурье по  $x$ . Именно: поскольку

решение задачи (2) принадлежит  $L^2$  по  $x$  при любом  $y$ , то существует ее фурье-преобразование

$$\hat{u}(k, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x, y) e^{ikx}$$

и

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{u} e^{-ikx}.$$

Поэтому, применив к (2) фурье-преобразование, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} + (\lambda - k^2) \hat{u} = 0, \\ \hat{u}|_{y=0} = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{u}(k, y)^2 < \infty \quad \forall y \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Эта задача однозначно разрешима, если добавить к ней условие

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \Big|_{y=0} = \sqrt{\lambda - k^2} \varphi(k, \lambda) \in L^2(\mathbb{R}^1),$$

и решение ее имеет вид

$$\hat{u}(k, y) = \varphi(k, \lambda) \sin(\sqrt{\lambda - k^2} y).$$

Поэтому общее решение задачи (2) есть

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \varphi(k, \lambda) \sin(\sqrt{\lambda - k^2} y) e^{-ikx}.$$

В частности, возьмем

$$\varphi(k, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2i}, & k \in (0, a), \\ -\frac{1}{2i}, & k \in (-a, 0), \\ 0 & \end{cases}$$

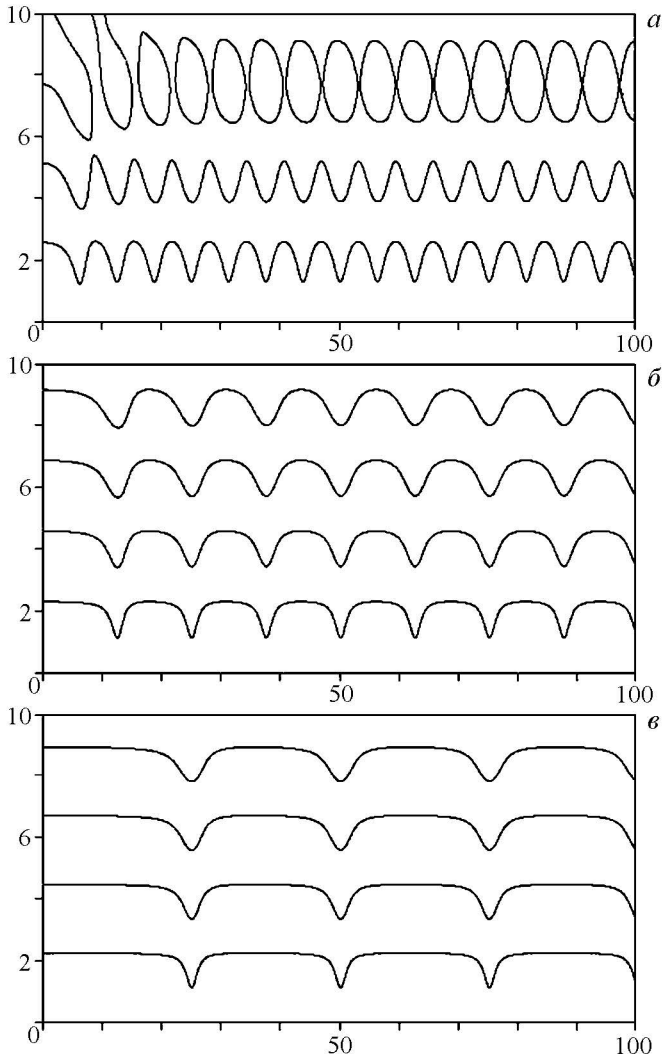


Рис. 1. Узловые линии функции  $u(x, y)$  при  $\lambda = 2$  и  $a = 1$  (а), 0.5 (б) и 0.25 (в)

( $a^2 < \lambda$ ), тогда имеем:

$$u(x, y) = \int_0^a dk \sin(\sqrt{\lambda - k^2} y) \sin kx.$$

Область между двумя кривыми  $u(x, y) = 0$  представляет собой гофрированный волновод  $\Omega$  (рис. 1, 2), в котором функция  $u(x, y)$  удовлетворяет уравнению  $\Delta u + \lambda u = 0$ , обращается в нуль на его границе и принадлежит  $L^2(\Omega)$ , поэтому функция  $u(x, y)$  является собственной функцией волновода  $\Omega$ , отвечающей заданному собственному значению  $\lambda$ .

Отметим, что приведенные результаты показывают возможность построения волноведущих систем с ловушечными модами, в том числе соответствующими собственным значениям, лежащим выше нижней границы непрерывного спектра.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-01-00111).

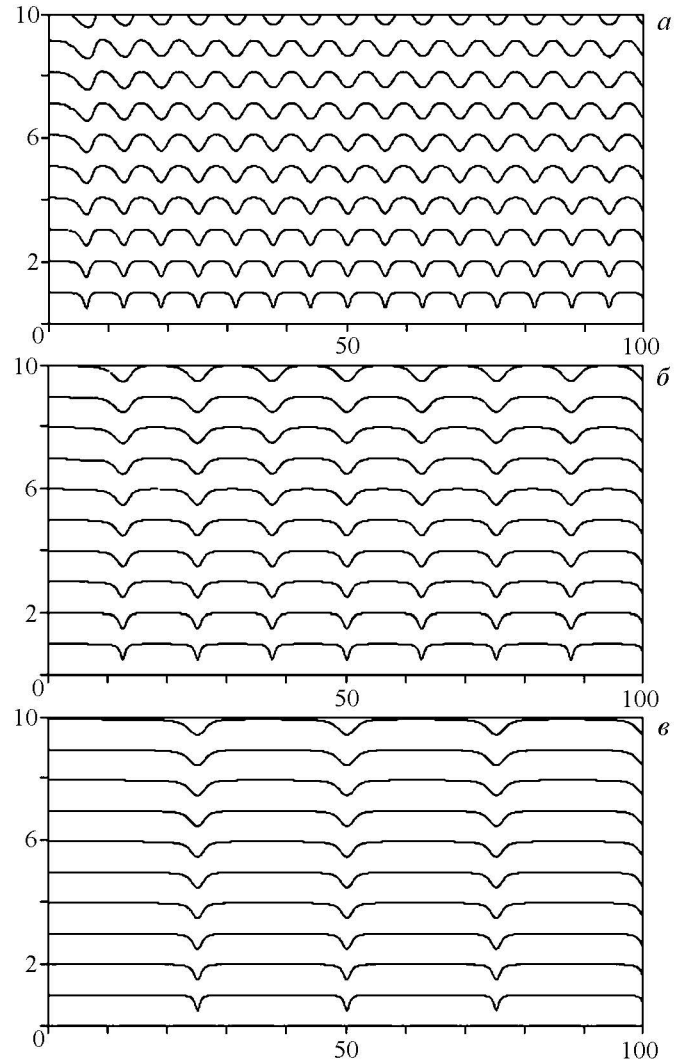


Рис. 2. Узловые линии функции  $u(x, y)$  при  $\lambda = 10$  и  $a = 1$  (а), 0.5 (б) и 0.25 (в)

#### Литература

1. Rellich F. // Studies and Essays Presented to R. Courant. N. Y., 1948. P. 329.
2. Evans D.V., Levitin M., Vassiliev D. // J. Fluid Mech. 1994. **261**. P. 21.
3. Davies E.B., Parnowski L. // Q. J. Mech. Appl. Math. 1998. **51**. P. 477.
4. Werner P. // Z. Angew. Math. Mech. 1987. **67**, No. 4. P. 43.
5. Exner P., Seba P. // J. Math. Phys. 1989. **30**. P. 2574.
6. Bulla W., Gesztesy S., Renger W., Simon B. // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. **125**. P. 1487.
7. Делицын А.Л. // ЖВМ и МФ. 2000. **40**. С. 577.
8. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. №5. С. 23 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 5).

Поступила в редакцию  
01.06.01