УДК 539.12.01

О ЯВНЫХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ ИНТЕГРИРУЕМЫХ КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ КАЛОДЖЕРО–МОЗЕРА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Д.В. Мещеряков, Т.Д. Мещерякова

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

E-mail: meshcher@recrep.phys.msu.su

Найдены явные решения для одной полностью интегрируемой системы трех частиц во внешнем поле. Получено соотношение, связывающее начальные условия, константу связи и время падения двух частиц в сингулярность потенциала взаимодействия.

Исследование многочастичных конечномерных полностью интегрируемых систем частиц по-прежнему далеко от завершения и вызывает устойчивый интерес [1–6]. Для многих потенциалов, приводящих к полностью интегрируемым системам, были разработаны различные методы решения соответствующих уравнений движения [1–4]. В работе [5] был найден такой метод для систем Калоджеро–Мозера во внешнем поле. В настоящей работе этот метод используется для получения явных решений уравнений движения одного двухпараметрического класса полностью интегрируемых систем частиц во внешнем поле в случае двух и трех частиц. На основе полученных решений оценивается время падения частиц на центр для различных начальных условий.

Свойство полной интегрируемости рассматриваемых систем обеспечивается наличием N интегралов движения, находящихся в инволюции. Гамильтониан системы принадлежит множеству интегралов движения и имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2} + W(x_i) \right) + \sum_{i>j}^{N} V(x_i - x_j). \qquad (1)$$

Система (1) обладает свойством полной интегрируемости лишь при условии, что потенциалы внешнего поля $W(x)$ и парного взаимодействия $V(x)$ имеют следующий вид:

$$V(x) = \frac{a}{x^2}, \quad W(x) = \gamma_1 x^4 + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x, \qquad (2)$$

где $a, \gamma_i, i = 1, 2, 3$ — произвольные константы.

В работе [5] была установлена связь системы N частиц с гамильтонианом (1) и потенциалами (2) с неоднородным уравнением Бюргерса–Хопфа. Эта связь позволила указать способ решения уравнений движения для системы (1)–(2). А именно: при условии, что определяющие потенциалы константы удовлетворяют соотношениям

$$a = -A^2, \quad \gamma_1 = -\frac{\alpha^2}{2}, \quad \gamma_2 = -\alpha\beta, \quad \gamma_3 = -\alpha A(N-1), \qquad (3)$$

где A, α, β — произвольные константы, координаты N частиц являются нулями функции

$$\phi(x,t) = \sum_{k=0}^{N} x^k \left[\exp(t\hat{T})\mathbf{c}(o) \right]_k, \qquad (4)$$

где

$$\hat{T}_{00} = -\beta, \quad \hat{T}_{02} = -a,$$
$$\hat{T}_{N-1N} = -N\beta, \quad \hat{T}_{N-1N-2} = 2\alpha, \quad \hat{T}_{NN-1} = \alpha,$$
$$\hat{T}_{kk-1} = (N+1-k)\alpha, \quad \hat{T}_{kk+1} = -(k+1)\beta,$$
$$\hat{T}_{kk+2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}a, \quad 1 \leqslant k \leqslant N-2 \qquad (5)$$

и

$$c_{N-k}(0) = (-1)^k \sum_{1 \leqslant \lambda_1 < \ldots < \lambda_k \leqslant N} x_{\lambda_1}(0) \ldots x_{\lambda_k}(0),$$
$$c_N(0) = 1.$$

Остальные элементы матрицы $\hat{T}$ равны нулю. В этих выражениях $x_i(0)$, $i = 1, \ldots, N$, — начальные координаты N частиц.

Применим кратко изложенный выше метод [5] явного нахождения решений уравнений движения для следующего двухпараметрического класса полностью интегрируемых систем частиц во внешнем поле. Рассмотрим системы частиц вида (1) с потенциалами (2) при ограничениях (3). Наложим дополнительные условия:

$$\beta = 0, \quad \alpha = -A^2 k, \qquad (6)$$

где k — произвольная константа. Случай $k = 1$ был рассмотрен в работе [6]. Таким образом, имеются два параметра, A и k, в потенциалах $V(x)$, $W(x)$. Константа A задает интенсивность парного взаимодействия частиц, т. е. является константой связи. Второй параметр k определяет отношение интенсивности парного взаимодействия к внешнему полю. При $k \to 0$ частицы испытывают только парное взаимодействие, а при $k \to \infty$ движутся во внешнем поле, не взаимодействуя друг с другом.

Получим и проанализируем явные решения уравнений движения для двух и трех частиц с гамильтонианом (1) и потенциалами (2) при ограничениях (3) и (6). Другими словами, будем рассматривать двухпараметрическое подмножество систем (1)–(3), определяемое условиями (6).

Применим данный метод к простейшему случаю двух частиц. Для $N=2$ из (4)–(5) получаем $\hat{T}^3=(-2a^3k^2)E$, где E — единичная матрица. В этом случае ряд в (4) можно просуммировать, и координаты двух частиц даются двумя решениями уравнения

$$\phi(x,t)=0. \tag{7}$$

При этом уравнение (7) имеет следующий вид:

$$\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{x}{-a(2k^2)^{\frac{1}{3}}}\right)^k S_k(\theta)\bar{T}^k\mathbf{c}(o)]_k=0,$$

где $a\bar{T}=\hat{T}$, $\theta=-at(2k^2)^{1/3}$,

$$S_0(\theta)=\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{\theta}+2\,\mathrm{e}^{-\theta/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta\right)\right),$$

$$S_1(\theta)=\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{\theta}-2\,\mathrm{e}^{-\theta/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right),$$

$$S_2(\theta)=\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{\theta}-2\,\mathrm{e}^{-\theta/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

При $k=1$ асимптотика данного уравнения при любых начальных условиях имеет вид $x^2-2^{1/3}x+2^{2/3}=0$. Отсюда видно, что за некоторое конечное время t_0 частицы падают в сингулярность потенциала взаимодействия. Однако при $k\neq 1$ для любых начальных значений $x_1(0)$ и $x_2(0)$ существуют значения k, при которых падение на центр не происходит. Например, для специального выбора $x_1(0)=-c$, $x_2(0)=c$ падение на центр не происходит для значений k, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{1}{k^2}>c^2-1.$$

При произвольных начальных условиях падение на центр не происходит, когда начальные условия и параметр k удовлетворяют следующему неравенству:

$$k^3 8x_1(0)x_2(0)(x_1(0)+x_2(0))+k^2 4\Big(x_1(0)^2x_2(0)^2-\\-(x_1(0)+x_2(0))-1\Big)+k4(x_1(0)+x_2(0))+\\+4(x_1(0)x_2(0)-1)-(x_1(0)+x_2(0))^2<0.$$

Физический смысл этих неравенств состоит в том, что при некоторых значениях параметра k притяжение частиц друг к другу в парном потенциале компенсируется отталкиванием, порожденным внешним полем, так что частицы не уходят на бесконечность и не падают на центр за конечное время.

Рассмотрим теперь систему трех частиц, $N=3$. При ограничениях (6) получаем $\hat{T}^4=0$ и алгебра T-матриц становится конечной. Рассмотрим далее симметричные начальные условия

$$x_1(0)=-x_0,\ x_2(0)=0,\ x_3(0)=x_0. \tag{8}$$

Введем обозначение $r=1/(-A^2t)$. В этом случае уравнение (8) принимает следующую форму Кардано [7]:

$$y^3+uy+q=0,\quad x=y-\frac{r^2(3+x_0^2r)}{3Z}, \tag{9}$$

где

$$Z=r^3-x_0^2k^2r-k^2,\quad u=\frac{-r^4(x_0^4k^2+9r+3x_0^2r^2)}{3Z^2},$$

$$q=\frac{k\sum\limits_{m=0}^{8}C_mr^m}{Z^3},$$

$$C_0=k^4,\quad C_1=3k^4x_0^2,\quad C_2=3k^4x_0^4,$$

$$C_3=k^2(k^2x_0^6-3),\quad C_4=-6k^2x_0^2,\quad C_5=-3k^2x_0^4,$$

$$C_6=4-\frac{2}{27}k^2x_0^6,\quad C_7=4x_0^2,\quad C_8=\tfrac{2}{3}x_0^4.$$

Решения (9) определяются значением дискриминанта $Q=-108((u/3)^3+(q/2)^2)$ [8]. При $0\leqslant t<t_0$ имеем $Q>0$ и, как следствие, три действительных корня, дающие координаты трех частиц:

$$y_1=N+M,\quad y_{2,3}=-\frac{N+M}{2}\pm i\sqrt{3}\frac{N-M}{2},$$

где

$$N=\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-Q}{108}}\right)^{1/3},\quad M=\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{-Q}{108}}\right)^{1/3},$$

при условии, что $MN=-u/3$. В момент времени $t=t_0$ имеем $Q=0$, что приводит к равенству координат двух частиц. То есть в этот момент времени две частицы падают в сингулярность парного потенциала взаимодействия. Рассматривая произвольные начальные условия, находим из (3)–(5) асимптотическую форму уравнения (9) (при условии, что $A\neq 0$):

$$(1-kx_1(0)x_2(0)x_3(0))\left(x^3-\frac{1}{k}\right)=0.$$

Отсюда видно, что частицы падают в сингулярность за конечное время при любых начальных условиях.

Рассмотрим предельный случай, позволяющий найти точное выражение для t_0. Пусть $A=z$, $k=1/z^2$. Устремим z к нулю. Этот предельный переход соответствует бесконечно слабому парному взаимодействию при конечном внешнем поле. В этом случае легко найти точное выражение для t_0. Рассмотрим начальные условия $x_1(0)=x_1$, $x_2(0)=x_2$, $x_3(0)=0$. В отсутствие парного взаимодействия координата третьей частицы все время остается равной нулю. Два других решения имеют вид

$$U(t,k,x_1,x_2)=t^2-\frac{12^{1/3}(x_1+x_2)}{kx_1x_2}t+\frac{12^{2/3}}{k^2x_1x_2},$$

$$x_{1,2}(t)=\frac{1}{U(t,k,x_1,x_2)}\,\frac{-12^{1/3}}{k}\left(t-\frac{12^{1/3}}{kx_{2,1}}\right).$$

Отсюда получаем для t_0 следующее выражение:

$$t_0=\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\left|\frac{(x_1+x_2)\left(1-\frac{|x_1-x_2|}{|x_1+x_2|}\right)}{kx_1x_2}\right|.$$

В рассмотренном случае за время t_0 одна из частиц (или обе в случае $x_1=x_2$) уходит на бесконечность. Падение в сингулярность парного потенциала взаимодействия не происходит, так как константа связи $A=0$.

Пользуясь выражением для дискриминанта в общем случае, получаем следующую оценку сверху для t_0:

$$\begin{aligned} t_0={}&\frac{1}{4A^2(k+k^{-1/4})}\times\\ &\times\Bigg|\Bigg[(1-k)+9\Big(x_1(0)x_2(0)+\\ &\qquad+x_1(0)x_3(0)+x_2(0)x_3(0)\Big)+\\ &+3(k-1)x_1(0)x_2(0)x_3(0)-21(k-1)\times\\ &\times\Big(x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)\Big)\frac{1}{kx_1(0)x_2(0)x_3(0)}\Bigg]\Bigg|. \end{aligned} \tag{10}$$

Эта оценка справедлива при $x_i(0)\neq 0,\ \ i=1,2,3$. Из оценки следует, что при уменьшении констант A^2 и k время падения в сингулярность увеличивается.

Исследование выражения (10) показывает, что для некоторых начальных условий существует локальный максимум t_0 при конечных $k>0$. Например, для начальных условий $x_1(0)=-x_0$, $x_2(0)=x_1$, $x_3(0)=x_0$ в случае

$$x_1>\frac{1}{129}\,\frac{24x_0^2\left(12+\sqrt{15}\right)-43}{x_0^2+7}$$

или

$$x_1<\frac{1}{129}\,\frac{24x_0^2\left(12-\sqrt{15}\right)-43}{x_0^2+7}$$

существует локальный максимум t_0 в точке k_0. Точное выражение не приведено вследствие его громоздкости. Простая оценка сверху имеет вид

$$k_0=\frac{1}{8W}\left(9(W-8x_0^2)+\sqrt{129(W^2-13x_0^2W+41x_0^4)}\right),$$

где $W=1+3x_1(7+x_0^2)$.

Полученные явные решения уравнений движения могут быть использованы для проверки различных приближенных методов, а также в качестве нулевого приближения при исследовании близких к рассмотренным неинтегрируемых систем частиц.

Литература

1. *Calogero F.* // Lett. Nuovo Cimento. 1975. **13**. P. 411; *Moser J.* // Adv. in Math. 1975. **16**. P. 197.
2. *Dittrich J., Inozemtsev V.I.* // J. Phys. A. 1993. **20**. P. 753.
3. *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* // Phys. Reports. 1983. **94**. P. 312.
4. *Grosse H.* // Acta Phys. Austr. 1980. **52**. P. 101.
5. *Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V.* // Phys. Lett. 1984. **A106**. P. 105.
6. *Мещеряков Д.В., Тверской В.Б.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 1. С. 56 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 1. P. 66).
7. *Korn G.A., Korn Th.M.* // Mathematical Handbook. N.Y.: McGrow-Hill, 1965.
8. *Feferman S.* // The Number Systems. Foundation of Algebra and Analysis. Reading: Addison–Wesley, 1964.

Поступила в редакцию
17.10.01