УДК 539.3

НЕКОММУТАТИВНАЯ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Чинь Ван Хоа

(*кафедра физики полимеров и кристаллов*)

E-mail: khoa@polly.phys.msu.su

Описана процедура перехода к некоммутативной термомеханической деформации. Получен критерий пластичности деформации, являющийся условием эволюции Пригожина, и условие появления ламинарной структуры.

1. При описании процесса пластической деформации в простейшем случае используется механизм сдвига атомных плоскостей в кристалле относительно друг друга. Предел упругости определяется в виде $\tau_{\rm cr} = \frac{Ga}{2\pi d}$, где a — межатомное расстояние, d — расстояние между плоскостями скольжения, и, таким образом, значение $\tau_{\rm cr}$ должно быть примерно на порядок ниже величины модуля сдвига G. Однако экспериментальные данные [1] показали, что для олова $G = 1.9 \cdot 10^{11}$ дин/см^2, в то время как $\tau \approx 13 \cdot 10^6$ дин/см^2, для серебра соответствующие значения $2.8{\cdot}10^{11}$ и $6{\cdot}10^6$, для алюминия — $2.5{\cdot}10^{11}$ и $4 \cdot 10^{11}$ дин/см^2 [1, 2]. Следует отметить, что более точный учет расположения атомных плоскостей при сдвиге дает оценку $\tau_{\rm cr} \sim G/30$, и это на несколько порядков превосходит экспериментально наблюдаемую величину. Причина такого явления заключается в когерентности перестроек структуры кристалла. Поэтому для описания пластической деформации целесообразно использовать феноменологический подход, принятый в механике сплошной среды.

Рассмотрим вначале сплошную среду. Как известно, под действием нагрузки эта среда переходит в пластическое состояние, при этом данные экспериментов показывают, что в пластическом состоянии напряжение и деформация сильно флуктуируют. Более того, диаграмма напряжение – деформация ($\sigma = f(e)$) сходна с диаграммой давление – объем ($P = f(V)$) в жидкости [3]. С другой стороны, наблюдается локальный фазовый переход на поверхности трещины [4–6]. Таким образом, состояние, близкое к разрушению, можно считать состоянием перехода, или критическим, в котором возможно спонтанное возникновение упорядоченного состояния [7].

Плотность распределения вероятности перехода к пластическому состоянию определяется из уравнения Фоккера–Планка. Однако, учитывая потенциальный характер процесса деформации, вместо уравнения Фоккера–Планка можно использовать уравнение Шрёдингера. Это значит, что процесс пластической деформации можно считать процессом с суперсимметрией. При этом тензор деформации играет роль параметра порядка.

В монографии [8] А.А. Ильюшин ввел концепцию траектории деформации в пространстве E_5. Пространство E_5, как показано в работе [7], — это слой в расслоенном пространстве деформации. Поэтому поле деформации можно считать калибровочным полем, в котором обобщенная траектория деформации Ильюшина является сечением расслоения деформации. Идентифицирование траектории деформации с узлами позволило проявить топологический характер процесса деформации, связанный с инвариантом Виттена. Распределение плотности вероятности перехода к пластичности имеет вид [7]

$$Z = \int \exp[-kS_{\rm CS}(e)]\mathcal{D}e,$$

где k — коэффициент упругости, $S_{\rm CS}$ — действие Черна–Саймонса:

$$S_{\rm CS} = \int \Gamma_{\rm CS},$$

$\Gamma_{\rm CS}$ — форма Черна–Саймонса для многообразия деформации.

2. В феноменологическом подходе [8] интересен вопрос о том, в какой мере включение в исходные соотношения тепловых параметров (т. е. расширение механики до термомеханики) позволяет конкретизировать вид зависимости деформации от напряжения. Деформируемое тело рассматривается при этом как термодинамическая система, термопотенциал (или потенциал деформации) которой является функцией состояния. При малых деформациях в качестве внутренних параметров в монографии [8] были выбраны температура и тензор деформации. Таким образом, имеются следующие определяющие соотношения:

$$\sigma = \varrho\, \partial_e f[e, e^{\cdot}, T, G], \quad S = -\partial_T f[e, e^{\cdot}, G],$$

$$q = -\partial_t f[e, T, G], \quad G = \operatorname{grad} T,$$

где S — энтропия, T — температура, q — тепловой поток, ∂_j — производная по параметру j, ϱ — плотность, t — время, точкой обозначено дифференцирование по времени. Было предложено существование предельной поверхности $\Psi(e, N^p) = 0$. При этом оператор N^p отражает возможность запоминания предыстории деформирования, и его можно представить в виде набора величин e^p. В подобной ситуации в физике рассматривается концепция фонона для описания влияния тепла на процесс деформации. В этом случае гамильтониан $H(e,\psi)$ является функцией деформации e и поля ψ, описывающего воздействие фононов [9–13].

Оба описаных выше подхода не учитывали флуктуации поля деформации, а также его некоммутативную природу. Поэтому не было возможности проверить правильность гипотезы изотропии и обнаружить топологическую природу сингулярности Койтера.

В настоящей работе построена общая модель деформации, основанная на некоммутативном формализме с тензором деформации в роли параметра порядка.

3. Система в процессе пластической деформации — это сложная система в смысле определения Хакена [14]. Качественно можно сказать, что симметрия системы при неравновесном фазовом переходе переходит в q-симметрию [7]. Эта перестройка связана с существованием параметра порядка, и ее можно рассматривать как процедуру уменьшения числа степеней свободы. Тензор деформации является не только параметром порядка, но и параметром состояния.

Как и в работах [11, 15], рассмотрим деформированное тело, в котором поле деформации является калибровочным полем, т. е. матричной функцией $f \in \mathcal{C}(R_4)\otimes 1$. Влияние теплового потока на деформацию опишем скалярной функцией, отражающей степень свободы фонона; в некоммутативной геометрии ее можно представить в виде функции с матричным значением $q \in \mathcal{C}(R_4)\otimes M_n$, где M_n — алгебра матрицы $n\times n$. Таким образом, общее термодеформированное пространство — это тензорное произведение $P=\mathcal{C}(R_4)\otimes M_n$. Можно идентифицировать это пространство как ассоциативную алгебру Конна $\mathcal{A}$.

Далее, необходимо ввести универсальную алгебру дифференциальных форм Ω. Поскольку конкретному выбору этой алгебры соответствует определенный тип дифференциального исчисления, в работе [7] была выбрана алгебра $\Omega(P)$ в качестве алгебры Хопфа и таким образом было использовано дифференциальное исчисление типа Вороновича. Здесь для простоты мы выберем алгебру Ω^1_D в форме

$$\Omega^1_D(\mathcal{A})=\Omega^1_D(C(R_4))\otimes\Omega^1_D(M_n).$$

Это тензорное произведение алгебры дифференциальных форм над алгеброй гладких функций и алгебры дифференциальных форм над алгеброй $n\times n$ матриц. В свою очередь, алгебра $\Omega^1_D(\mathcal{A})$ может быть представлена через прямую сумму горизонтальной и вертикальной частей:

$$\Omega^1_D(\mathcal{A})=\Omega^1_H\oplus\Omega^1_V,$$

причем

$$\Omega^1_H=\Omega^1_D(C(R_4))\otimes M_n,\quad \Omega^1_V=C(R_4)\otimes\Omega^1_D(M_n).$$

Таким образом, выбрано дифференциальное исчисление на алгебре $\mathcal{A}$, являющейся обычным внешним дифференциалом. Более точно, если через $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ обозначить алгебру Ли производных над алгеброй $\mathcal{A}$, то получим

$$\mathrm{Der}(\mathcal{A})=(\mathrm{Der}(C(R_4))\otimes 1)\oplus(C(R_4)\otimes\mathrm{Der}(M_n)).$$

Дифференциал df элемента $f\in\mathcal{A}$ также представляется в виде суммы:

$$df=d_Hf+d_Vf,$$

где d_Hf и d_Vf принадлежат алгебрам Ω^1_H и Ω^1_V соответствено. Если $E_k,\ k\in(1,2,n^2-1)$, является базисом алгебры M_n, то $\partial_k=ad(iE_k)$ есть базис алгебры $\mathrm{Der}(M_n)$ и $[\partial_k,\partial_l]=\sum C_{klm}\partial_m$. Таким образом, базис θ^k алгебры $\Omega^1_D(M_n)\subset\Omega^1_D(\mathcal{A})$ определен в виде $\theta^k(\partial_l)=\delta^k_l 1$. Если через $\theta^i=(\theta^\alpha,\theta^a)$, где $\alpha=0,1,2,3,\ \ a\in(1,2,n^2-1)$, обозначен базис алгебры $\Omega^1_D(\mathcal{A})$, то базис в $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ будет иметь вид $e_i=(e_\alpha,e_a)$, где $e_\alpha=e^\mu_\alpha\partial_\mu$ — 4-генераторы для алгебры $C(R_n)$, а $e_\alpha=ad(E_\alpha)$ — базис $\mathrm{Der}(M_n)$. В этом случае θ^i принимает вид

$$\theta^\alpha=\theta^\alpha_\mu dx^\mu,\quad \theta^a=E_bE^adE^b,$$

а дифференциалы d_H и d_V:

$$d_Hf=e_\alpha f\theta^\alpha,\quad d_Vf=e_\alpha f\theta^a,\quad f\in\mathcal{A}.$$

Кроме того, существует канонический элемент $\theta\in\Omega^1_D(M_n)$, определенный как $\theta=E_k\theta^k$.

В рамках геометрии Конна некоммутативное расслоение является правым либо левым $\mathcal{A}$-модулем, или, более точно, эрмитовым $\mathcal{A}$-модулем. На этом модуле определяется следующая связность [7]:

$$\omega=A+\chi,$$

причем A — элемент Ω^1_H и χ — элемент Ω^1_V. В свою очередь, элемент χ представляется в виде суммы:

$$\chi=\theta+\phi$$

вследствие того, что $\Omega^1_D(M_n)\subseteq\Omega^1_V$. Здесь ϕ является полем Хиггса. Если через $\mathcal{U}$ обозначить группу калибровочных отображений, то элементы ω,A,θ,ϕ преобразуются под действием $g\in\mathcal{U}$ по правилу

$$\omega'=g^{-1}\omega g+g^{-1}dg,$$

$$A'=g^{-1}Ag+g^{-1}d_Hg,\quad \theta'=\theta,\quad \phi'=g^{-1}\phi g.$$

Напряженность поля деформации определяется через 2-форму Ω:

$$\Omega=d\omega+\omega^2\quad\text{или}\quad\Omega=F+D_H\phi+\Omega_V,$$

причем

$$F=d_HA+[A,A]=\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta,$$

$$\Omega_V=\frac{1}{2}\Omega_{ab}\theta^a\wedge\theta^b,\quad \Omega_{ab}=[\phi_a,\phi_b]-C^c_{ab}\phi_c,$$

$$D_H\phi = d_H\phi + A\phi + \phi A = \theta^\alpha(e_\alpha\phi + [A_\alpha, \phi]),$$
$$\phi = \phi_\alpha\theta^\alpha, \quad A = A_\alpha\theta^\alpha.$$

Действие поля будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2}(\Omega_{ij}, \Omega_{ij}).$$

Таким образом, в рамках модели [7] получаем вероятность перехода к пластическому состоянию

$$Z = \int \exp(-kL).$$

Итак, процедура перехода от механики к термомеханике состоит в следующем: 1) строится термодеформированное пространство с двумя внутренними параметрами — тензором деформации и потоком тепла (отражает степень свободы фонона); 2) строится действие системы (свободная энергия); 3) определяется распределение вероятности перехода к пластичности. В этом случае определяющие соотношения имеют вид

$$\sigma = \varrho\,\partial_e L[e, e^{\cdot}, T, G], \quad S = -\partial_T L[e, e^{\cdot}, G],$$
$$q = -\partial_t L[e, T, G], \quad G = \nabla_i T. \qquad (1)$$

При любом изменении состояния изменение энтропии складывается из двух частей: $dS = d_eS + d_iS$, где d_eS обусловлено тепловым обменом и обменом веществом с внешней средой, а d_iS — процессами внутри самой системы. Как и в работе [8], для плотности энтропии получим производство энтропии вязкой теплопроводной среды:

$$P = \frac{d_iS}{dt} = \frac{\partial L}{\partial e_{ij}}e_{ij} - \frac{\mu(\nabla_i T)^2}{T^2},$$

где для простоты второй член имеет вид закона Фурье и полагается $\mu > 0$. Таким образом, в качестве критерия пластичности можно использовать условие эволюции Пригожина:

$$dP \leqslant 0,$$

а в качестве условия устойчивости — условие равновесия:

$$P = \min, \quad dP = 0.$$

4. Концепция спонтанного нарушения симметрии является основной при построении всех теорий объединения. Подобно тому как это сделано в работах [9–13], получим условие возникновения ламинарной структуры среды в процессе деформации, используя эту концепцию. Действительно, если задана ω-связность, то напряженность поля деформации имеет вид $f = d\omega + \omega^2$, а его действие есть скалярное произведение

$$S = (m)^{n^2-1} < d\omega + \omega^2 \mid d\omega + \omega^2 >,$$

где m — коэффициент упругости. В частности, если выбрать ω в форме $\omega = A_\mu dx^\mu + (B_k - iE_k)\theta$ с матричными векторами A_μ $(\mu = 1 \ldots s)$, B_k, $k \in (1, \ldots, n^2 - 1)$, то получим лагранжиан

$$L = (1/4n)\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + (1/2n)\,\mathrm{Tr}(\nabla_\lambda\phi_k\nabla^{\lambda\phi^k}) - V(\phi),$$

где потенциал имеет форму $V(\phi) = -(1/4n) \times \mathrm{Tr}([\phi_k, \phi_l] - M\sum C_{klm}\phi_m)^2$.

Выражение для потенциала $V(\phi)$ показывает, что существуют две калибровочные орбиты: орбита Ω_0 соответствует значениям $A_\mu = 0$, $\phi_k = 0$, а орбита Ω_1 — значениям $A_\mu = 0$, $\phi_k = imE_k$. Кроме того, «масса» для поля ϕ_k равна $m_\phi = nm$, т. е. в среде появится область, коэффициент упругости которой равен nm (при $n = 2$ $m_0 = 2m$).

Для орбиты Ω_1, используя метод [14], т. е. для случая $n = 2$, когда $\phi_k = i(\phi_k^0 1 + \phi_k^l E_l)$, где $\phi_k^l = \tau\delta_k^i + \xi_k^l + \alpha_k^l$, $\tau = 1/3$, ξ_k^l — симметричная и бесследовая матрица, а α_k^l — антисимметричная, получим для спектра коэффициента упругости («масса») соответствующие три области: $m_\tau = 2m$, $m_\xi = 4m$, $m_\alpha = 0$. Таким образом, в этом процессе появляется ламинарная структура, которая была предсказана в работах [9–13].

Литература

1. *Кацнельсон А.А.* Введение в физику твердого тела. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
2. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978.
3. *Ausloos M.* // Solid Stat. Comm. 1986. **59**, No. 6. P. 401.
4. *Гаргин В.Г.* // Сверхтвердые материалы. 1982. № 2. С. 17.
5. *Песин В.А., Ткаченко Н.Н., Фельдчук Л.И.* // Журн. физ. химии. 1979. **53**, № 11. С. 2794.
6. *Li-Shing Li, Pabst R.J.* // J. Material Sci. 1980. **15**, No. 10. P. 2861.
7. *Чинь В.Х.* // Докл. РАН. 2000. **372**, № 4. С. 473; 2001. **378**, № 3. С. 343; Современный анализ и его приложение: Тез. докл. конф. ВЗМШ-2000. Воронеж, 20–27 янв. 2000 г. С. 175; http://arXiv.org/abs/cond-mat/9907290.
8. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990; *Клюшников В.Д.* Физико-математические основы прочности и пластичности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994; *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973.
9. *Kleinert H.* // Phys. Lett. 1982. **89A**, No. 6. P. 294.
10. *Обухов С.П.* // ЖЭТФ. 1982. **83**, № 5(11). С. 1978.
11. *Паташинский А.З., Шумино Б.И.* // ЖЭТФ. 1985. **89**. С. 315.
12. *Умэдзава Х., Мацумоно Х., Тажика М.* Термополевая динамика и конденсированное состояние. М.: Мир, 1985.
13. *Олемской А.И., Панин В.Е., Петрунин В.А.* // Изв. вузов, Физика. 1987. № 11. С. 15.
14. *Хакен Г.* Информация и самоорганизация. М.: Мир, 1991; *Dubois-Violette M., Madore J., Kerner R.* // Class. Quantum Grav. 1991. **8**. P. 1077; J. Math. Phys. 1990. **31**, No. 2. P. 323.
15. *Поляков А.М.* Калибровочные поля и струны. Черноголовка: ИТФ им. Л.Д. Ландау, 1995.

Поступила в редакцию
26.09.01