УДК 517.958; 621.372.8

# О ПОВЕДЕНИИ ВЛОЖЕННЫХ В НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЗАПОЛНЕНИЯ ВОЛНОВОДА

**М.Д. Малых**

(*кафедра математики*)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

**В рамках формальной теории возмущений показано, что вложенные в непрерывный спектр собственные значения спектральной задачи для волновода, заполненного неоднородным веществом, переходят в комплексные резонансы при малом вещественном возмущении заполнения. Для этого доказано, что собственные функции уже в первом порядке теории возмущений не принадлежат пространству $\mathrm{L}^2$, хотя соответствующие им собственные значения остаются вещественными в том же порядке малости.**

Хорошо известны волноведущие системы, обладающие собственными значениями, вложенными в непрерывный спектр, при некотором специальном выборе границы волновода и его заполнения [1–6]. Однако не вполне ясно, как было указано в работе [4], сохранятся ли они при малом изменении формы границы или заполнения волновода.

Рассмотрим, например, в волноводе

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1,\ y \in S\}$$

с сечением $S$, представляющим собой односвязную конечную область в пространстве $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}^2$, задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} \Delta u + eq(x,y)u = 0, \\ u|_{\partial\Omega=0,} \\ u \in \mathrm{L}^2(\Omega). \end{cases} \tag{1}$$

Фигурирующая здесь функция $q(x,y)$ характеризует заполнение волновода; будем считать, что волновод заполнен локально-нерегулярно, т. е. что $q(x,y)$ кусочно-непрерывна и $\mathrm{Supp}[q(x,y)-1] \equiv \Omega'$ — конечная область. В работе [5] было показано, что задача (1) всегда имеет решение $u_0(x,y)$, отвечающее вложенному собственному значению $e_0$, если $q(x,y) \equiv q_0(x)$ (т. е. заполнение волновода представляет собой «вставку») и $q_0(x) - 1 \geqslant 0$ — достаточно малая функция. Отметим еще, обозначив как $\{\psi_n(y)\}$ набор собственных функций задачи Дирихле на сечении $S$, что функция $u_0(x,y)$ представима в виде произведения $u_0(x)\psi_2(y)$. Исследуем, сохранится ли вложенное собственное значение, если это заполнение будет возмущено:

$$q(x,y) = q_0(x) + \varepsilon q_1(x,y),$$

где $q_1$ — вещественная функция, а $\varepsilon$ характеризует малость возмущения.

Применим формально теорию возмущений. Допустим, что в окрестности собственного значения невозмущенной задачи $e_0$ имеется собственное значение $e(\varepsilon)$ задачи (1) при достаточно малом $\varepsilon$ и что это собственное значение и соответствующая ему собственная функция $u(x,y;\varepsilon)$ являются аналитическими функциями от $\varepsilon$, регулярными в нуле:

$$e(\varepsilon) = e_0 + e_1\varepsilon + \ldots,$$

$$u(x,y;\varepsilon) = u_0(x)\psi_2(y) + \varepsilon u_2(x,y) + \ldots\ .$$

Умножив (1) на $\psi_1(y)$ и проинтегрировав по всему сечению $S$, получим

$$\frac{d^2(u,\psi_1)}{dx^2} + e(qu,\psi_1) - \alpha_1^2(u,\psi_1) = 0,$$

где $\{\alpha_n^2\}$ — набор собственных значений задачи Дирихле на сечении $S$, соответствующих собственным функциям $\{\psi_n(y)\}$.

Подставим сюда ряды для $e(\varepsilon)$ и $u(\varepsilon)$, тогда в первом порядке теории возмущений, обозначив

$$(u_1,\psi_1) = u_{1,1}(x),$$

получим

$$\frac{d^2u_{1,1}}{dx^2} + [e_0q_0(x) - \alpha_1^2]u_{1,1} = e_0(q_1u_0,\psi_1).$$

Для того чтобы функция $u(x,y;\varepsilon)$ принадлежала $\mathrm{L}^2$, необходимо, чтобы и $u_{1,1}(x)$ принадлежала $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^1)$. Но уравнение

$$\frac{d^2u_{1,1}}{dx^2} + [e_0 - \alpha_1^2]u_{1,1} = e_0\left\{(q_1u_0,\psi_1) - [q_0(x)-1]u_{1,1}\right\}$$

имеет решение, принадлежащее пространству $\mathrm{L}^2$, лишь при весьма специальных значениях $q_1$, хотя условие

$$(q_1u_0,\psi_1) \equiv 0, \quad \text{или} \quad \int\limits_S dy\, q_1(xy)\psi_2(y)\psi_1(y) \equiv 0,$$

не является необходимым. Итак, в общем случае (когда $q_1(x,y)$ произвольное) неверно либо предположение о существовании возмущенного собственного значения в окрестности невозмущенного, либо предположение о том, что это возмущенное собственное значение и соответствующая ему собственная функция могут быть разложены в ряд по степеням $\varepsilon$ в окрестности точки $\varepsilon = 0$.

Обычно неверно первое предположение. Для того чтобы обосновать это, можно было бы обратиться к теории возмущений для собственных значений, погруженных в непрерывный спектр [7–9]. В рамках этой теории при помощи резольвенты невозмущенной задачи сводят исходную задачу к виду

$$v - \frac{\varepsilon}{e - e_0}\mathfrak{A}(e)v = 0, \tag{2}$$

где $\mathfrak{A}(e)$ — компактный голоморфный в окрестности точки $e_0$ оператор, а затем уже к задаче (2) применяют различные теоремы, связанные с теорией определителей Фредгольма.

Однако применительно к задаче (1) вместо того, чтобы строить резольвенту волновода $\Omega$ с заполнением $q_0(x)$, имеет смысл воспользоваться результатами [10], полученными при доказательстве существования решения у задачи о возбуждении током колебаний в волноводе, поскольку задача (1) уже была сведена к весьма сходному с (2) виду

$$v - \mathfrak{A}(e, \varepsilon)v = 0,$$

где $\mathfrak{A}(e, \varepsilon)$ — компактный голоморфный в окрестности точки $(e_0, 0)$ оператор. Таким образом, необходимо только исследовать возмущения собственного значения голоморфного компактного оператора $\mathfrak{A}(e, \varepsilon)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 00-01-00111) и программы «Университеты России» (код 015.03.02.001).

**Литература**


1. *Jones D.S.* // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1954. **49**. P. 668.
2. *Werner P.* // Z. Angew. Math. Mech. 1987. **67**, No. 4. P. 43.
3. *Evans D.V., Levitin M., Vassiliev D.* // J. Fluid Mech. 1994. **261**. P. 21.
4. *Davies E.B., Parnovski L.* // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1998. **51**. P. 477.
5. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. №5. С. 23 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 5).
6. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 6. С. 69 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 6).
7. *Albeverio S., Hoegh-Korn R.* // J. Math. An. Appl. 1984. **101**. P. 491.
8. *Howland J.S.* // Pacific J. Math. 1974. **55**. No. 1. P. 157.
9. *Howland J.S.* // Arch. Rat. Mech. Anal. 1970. **39**. P. 323.
10. *Шестопалов В.П.* Спектральная теория и возбуждение открытых структур. М.: Наука, 1987.


Поступила в редакцию
31.10.01

АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 532.5.013.4: 536.24

# ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНВЕКТИВНОЙ, ТЕПЛОВОЙ И АКУСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПЛОСКОМ СЛОЕ НЕРАВНОВЕСНОГО ГАЗА

**А.В. Уваров, А.И. Осипов, Д.Б. Рубинский**

(*кафедра молекулярной физики и физических измерений*)

E-mail: uvarov@mol.phys.msu.su

**Рассчитаны области значений параметров, соответствующие конвективной, тепловой и акустической неустойчивости плоского слоя колебательно-неравновесного газа.**

Неравновесный газ — часто встречающийся объект. В лабораторных условиях это активная среда газовых лазеров, разрядная плазма и т. д; в естественных условиях — верхняя атмосфера Земли и других планет, межзвездный газ и т. д. Поведение такого газа во многом определяется его устойчивостью по отношению к различным гидродинамическим возмущениям.

Традиционно гидродинамическая неустойчивость рассматривалась отдельно для различных мод: акустической, конвективной и тепловой. Усиление акустических волн в неравновесном газе анализировалось еще с 1960-х гг. [1, 2], однако, как правило, исследовалось распространение волн в однородной среде. Учет неоднородности, которая обязательно возникает при накачке энергии во внутренние сте-