

венного значения в окрестности невозмущенного, либо предположение о том, что это возмущенное собственное значение и соответствующая ему собственная функция могут быть разложены в ряд по степеням ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$.

Обычно неверно первое предположение. Для того чтобы обосновать это, можно было бы обратиться к теории возмущений для собственных значений, погруженных в непрерывный спектр [7–9]. В рамках этой теории при помощи резольвенты невозмущенной задачи сводят исходную задачу к виду

$$v - \frac{\varepsilon}{e - e_0} \mathfrak{A}(e)v = 0, \quad (2)$$

где $\mathfrak{A}(e)$ — компактный голоморфный в окрестности точки e_0 оператор, а затем уже к задаче (2) применяют различные теоремы, связанные с теорией определителей Фредгольма.

Однако применительно к задаче (1) вместо того, чтобы строить резольвенту волновода Ω с заполнением $q_0(x)$, имеет смысл воспользоваться результатами [10], полученными при доказательстве существования решения у задачи о возбуждении током колебаний в волноводе, поскольку задача (1) уже была сведена к весьма сходному с (2) виду

$$v - \mathfrak{A}(e, \varepsilon)v = 0,$$

где $\mathfrak{A}(e, \varepsilon)$ — компактный голоморфный в окрестности точки $(e_0, 0)$ оператор. Таким образом, не-

обходимо только исследовать возмущения собственного значения голоморфного компактного оператора $\mathfrak{A}(e, \varepsilon)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 00-01-00111) и программы «Университеты России» (код 015.03.02.001).

Литература

1. Jones D.S. // Proc. Camb. Phil. Soc. 1954. **49**. P. 668.
2. Werner P. // Z. Angew. Math. Mech. 1987. **67**, No. 4. P. 43.
3. Evans D.V., Levitin M., Vassiliev D. // J. Fluid Mech. 1994. **261**. P. 21.
4. Davies E.B., Parnowski L. // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1998. **51**. P. 477.
5. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 5. С. 23 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 5).
6. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 6. С. 69 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 6).
7. Albeverio S., Hoegh-Korn R. // J. Math. An. Appl. 1984. **101**. P. 491.
8. Howland J.S. // Pacific J. Math. 1974. **55**. No. 1. P. 157.
9. Howland J.S. // Arch. Rat. Mech. Anal. 1970. **39**. P. 323.
10. Шестопалов В.П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур. М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию
31.10.01

АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 532.5.013.4: 536.24

ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНВЕКТИВНОЙ, ТЕПЛОЙ И АКУСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПЛОСКОМ СЛОЕ НЕРАВНОВЕСНОГО ГАЗА

А.В. Уваров, А.И. Осипов, Д.Б. Рубинский

(кафедра молекулярной физики и физических измерений)

E-mail: uvarov@mol.phys.msu.su

Рассчитаны области значений параметров, соответствующие конвективной, тепловой и акустической неустойчивости плоского слоя колебательно-неравновесного газа.

Неравновесный газ — часто встречающийся объект. В лабораторных условиях это активная среда газовых лазеров, разрядная плазма и т. д.; в естественных условиях — верхняя атмосфера Земли и других планет, межзвездный газ и т. д. Поведение такого газа во многом определяется его устойчивостью по отношению к различным гидродинамическим возмущениям.

Традиционно гидродинамическая неустойчивость рассматривалась отдельно для различных мод: акустической, конвективной и тепловой. Усиление акустических волн в неравновесном газе анализировалось еще с 1960-х гг. [1, 2], однако, как правило, исследовалось распространение волн в однородной среде. Учет неоднородности, которая обязательно возникает при накачке энергии во внутренние сте-

пени свободы и теплоотводе в окружающую среду и играет принципиальную роль, проведен в работе [3]. Рассматривалось возникновение конвекции в среде как в результате фиксированного энерговыделения [4], так и вследствие химических реакций [5]. Обобщение задачи Бенара на неравновесный газ с различными механизмами накачки было сделано в работах [6, 7]. Теория теплового взрыва для неравновесного газа разрабатывалась в статье [8], а применительно к модели накачки энергии, рассматриваемой в настоящей работе, расчет условий возникновения теплового взрыва был сделан в [9].

В линейном приближении все гидродинамические моды, на которые распадается произвольное возмущение, можно рассматривать независимо. Такое исследование позволяет понять, при каких параметрах системы возникает тот или иной тип неустойчивости.

Однако во всех расчетах устойчивость по отношению к возмущениям в различных гидродинамических модах исследовалась при разных условиях накачки энергии в колебательные степени свободы молекул и разных граничных условиях, что затрудняет их сравнение.

Цель настоящей работы состоит в сравнительном исследовании условий возникновения тепловой, конвективной и акустической неустойчивости, рассчитанных при одном и том же способе накачки энергии и при одинаковых граничных условиях.

Критерии неустойчивости для неравновесного и равновесного газа, как показано в работах [7, 10], принципиально различны. Например, конвективная неустойчивость плоского слоя равновесного газа определяется разностью температур на граничных поверхностях или числом Рэлея (критическое число Рэлея $R_0 = 1708$). В колебательно-неравновесном газе вместо одного значения критического числа Рэлея R_0 возникает поверхность таких чисел R_0 , которая зависит от профиля температуры и от величины избыточного запаса колебательной энергии. В работах [7, 10] поверхность критических чисел Рэлея определялась для плоского слоя колебательно-возбужденного газа при условии постоянства колебательной энергии внутри слоя.

Решение задачи об устойчивости плоского слоя колебательно-неравновесного газа в настоящей работе проводилось в предположении постоянства мощности накачки энергии по толщине слоя при условии быстрой колебательной релаксации на стенках (колебательная и поступательная температуры T_v и T на стенках считаются равными).

Математически задача сводится к решению линейаризованной системы уравнений релаксационной гидродинамики. Временная эволюция гидродинамических возмущений описывается экспоненциальной

зависимостью от частоты. Если мнимая часть частоты отрицательна, то система неустойчива [6].

Исходная система уравнений для определения критической поверхности, разделяющей области конвективной устойчивости и неустойчивости, аналогична использованной в работе [10] и отличается от последней наличием второго уравнения, учитывающего неоднородность распределения колебательной температуры T_v :

$$D^6 v'_z = [3a^2 + s(z)] D^4 v'_z - [3a^4 + 2a^2 s(z)] D^2 v'_z + [a^6 + a^4 s(z) - a^2 R(z)] v'_z - \alpha_1 \alpha_2 T'_*,$$

$$D^2 T'_* = (\alpha_3 + a^2) v'_z - 2D^2 v'_z + \frac{1}{a^2} D^4 v'_z + (\alpha_1 + a^2) T'_*. \quad (1)$$

Здесь v'_z — величина возмущения компоненты скорости, параллельной оси z (ось z направлена перпендикулярно плоскому слою в сторону, противоположную направлению ускорения свободного падения \mathbf{g}); начало координат выбрано в середине слоя; вместо координаты z используется безразмерная координата $z' = \frac{z}{2L}$, причем штрих при z опущен. Величина $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ — безразмерный на ширину слоя $2L$ волновой вектор возмущений; $T'_* = \frac{T'_* a^2}{\gamma_1}$ — нормированное возмущение колебательной температуры; $R(z) = -\frac{g(2L)^3}{\kappa_T \nu} \frac{d \ln T}{dz}$ — число Рэлея; $R(z) = R_0 + rz$; $R_0 = R(z)|_{z=0}$; $r = \left(\frac{dR}{dz}\right)|_{z=0}$; $s(z) = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{m}{k_B} B_v \frac{(2L)^2}{\kappa_T} = s_0(1 - 4z^2)$; $\gamma_1 = \frac{T}{g c_v(T_v)} \frac{\nu}{\kappa_v} \left(\frac{1}{T} - B_v\right)$, где ν — коэффициент кинематической вязкости, κ_T и κ_v — коэффициенты поступательно-вращательной и колебательной теплопроводности соответственно, $B_v = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{eq}}{\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial T} + \frac{c_v}{\tau}$, τ — время колебательной релаксации, k_B — постоянная Больцмана, m — масса молекулы, γ — показатель адиабаты поступательно-вращательных степеней свободы, $\varepsilon(T_v)$ и $c_v(T_v) = \frac{\partial \varepsilon(T_v)}{\partial T_v}$ — значения колебательной энергии единицы массы и колебательной теплоемкости при температуре T_v ($\varepsilon_{eq} = \varepsilon(T)$, $c_v = c_v(T)$); $D = \frac{d}{dz}$. Коэффициент $\alpha_1 = \frac{(2L)^2}{\kappa_v \tau}$ характеризует соотношение между скоростями процессов колебательной теплопроводности и релаксации, а $\alpha_2 = \frac{(2L)^2}{\kappa_T \tau_1} \sim s_0 \left(\frac{1}{\tau_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{m}{k_B} \left(\frac{1}{T} - B_v\right)\right)$ — неравновесность в системе, при этом произведение $\alpha_1 \alpha_2$ определяет степень связанности системы уравнений (1); параметр $\alpha_3 = \frac{2L \tau_1 g}{\nu} (AB_{I\tau}) \frac{DT_v}{T}$ описывает профиль колебательной температуры.

Для данных s_0 и r (эти параметры характеризуют неравновесный запас колебательной энергии и профиль поступательной температуры), варьируя a , можно найти минимальную величину параметра R_0 , при которой $v'_z \neq 0$. Значения R_0 определяют

критическую поверхность $R_0(s_0, r)$. Пересечение этой поверхности с координатными плоскостями показано на рис. 1. Состояния, соответствующие точкам над поверхностью, являются конвективно неустойчивыми, под поверхностью — конвективно устойчивыми. Пересечение этой поверхности с осью R_0 определяет критическое значение $R_0 = 1708$, соответствующее равновесному случаю.

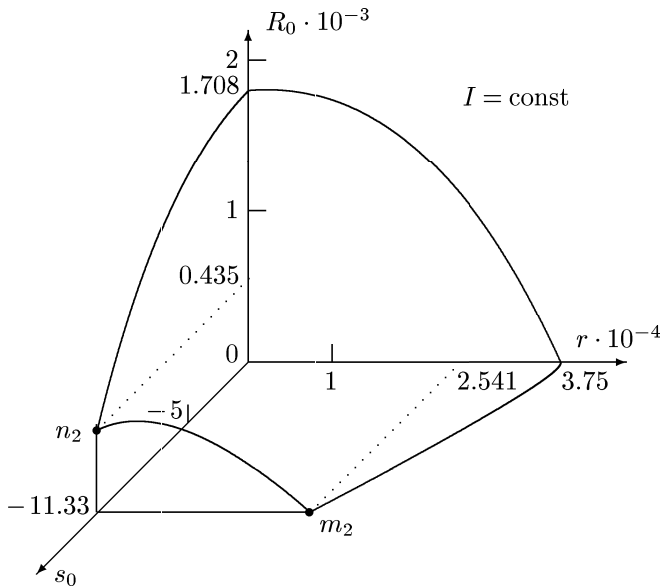


Рис. 1. Пересечение критической поверхности $R_0(s_0, r)$ с координатными плоскостями

При больших значениях неравновесной колебательной энергии в системе возможен тепловой взрыв, в результате которого энергия из колебательных степеней свободы молекул «мгновенно» переходит в поступательные. Система быстро нагревается, и устанавливается новое состояние, близкое к равновесному [10]. На рис. 1 состояниям теплового взрыва соответствуют точки на плоскости $s_0 = -11.33$. Результаты получены по методике, изложенной в работе [6].

На рис. 2 представлена результирующая картина: кривые, соответствующие моменту возникновения неустойчивости по всем трем гидродинамическим модам (конвективной, тепловой и акустической), а также приведены кривые (4 и 5), описывающие изменения параметров с ростом мощности накачки (вдоль направления стрелок) при фиксированной толщине слоя и начальном давлении. Расчеты проведены для случая одинаковых температур стенок ($R_0 = 0$). Данные об акустической неустойчивости получены путем пересчета результатов из работы [3]. Данные по конвективной и тепловой неустойчивости (кривая 2 и прямая 3, их пересечение — точка m_2) взяты из работы [10]. Состояния, соответствующие точкам, лежащим правее прямой 1, неустойчивы по отношению к акустическим возмущениям. Область устойчивого состояния

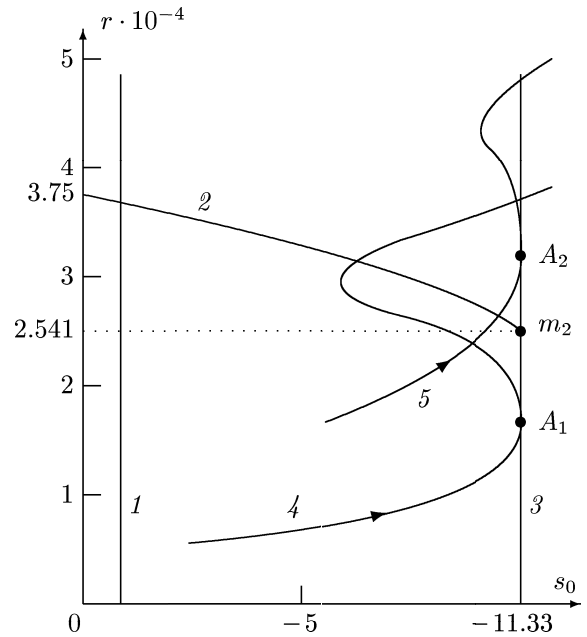


Рис. 2. Критические кривые в плоскости (r, s_0) при $R_0 = 0$, соответствующие моменту возникновения акустической (прямая 1), конвективной (кривая 2) и тепловой (прямая 3) неустойчивости; кривая 4 — зависимость реальных параметров газа от степени неравновесности при фиксированных значениях толщины слоя и температуры на стенках для определенного газа; кривая 5 — аналогичная 4, но для другой толщины слоя и (или) для другого рода газа

плоского слоя колебательно-неравновесного газа (см. рис. 2) ограничена значениями $0 \leq s_0 \leq -1$ и $0 \leq r \leq 37500$. Из рис. 2 также видно, что точки теплового взрыва (точки A_1 и A_2) всегда расположены в зоне акустической неустойчивости. При малых r (ниже точки m_2) тепловой взрыв происходит в зоне конвективной устойчивости. Однако он возможен и в области конвективной неустойчивости, если параметры системы при взрыве соответствуют точкам, лежащим на прямой $s_0 = -11.33$ выше m_2 (кривая 5).

Численные расчеты для кислорода O_2 при начальном давлении 10^3 Па и температуре на стенках 300 К выполнены для слоя различной толщины. С увеличением толщины слоя точка теплового взрыва A_1 смещается вверх и при $2L = 17.6$ см достигает m_2 . Таким образом, толщина слоя $2L$ является критическим параметром, при изменении которого меняется очередность возникновения теплового взрыва и конвекции. В точке m_2 интенсивность накачки $I = 2.84 \cdot 10^{-3}$ Вт/см³, что соответствует характерным для экспериментальных исследований значениям.

Литература

1. Haas R.A. // Phys. Rev. A. 1973. **8**, No. 2. P. 1017.
2. Bauer H.J., Bass H.E. // Phys. Fluids. 1973. **16**, No. 7. P. 988.
3. Кольцова Е.В., Осипов А.И., Уваров А.В. // Акуст. журн. 1994. **40**, № 6. С. 3.

4. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
5. Jones D.R. // Int. J. Heat. Mass Transfer. 1973. **16**. P. 157.
6. Осипов А.И., Уваров А.В. // УФН. 1996. **166**, № 6. С. 639.
7. Уваров А.В., Осипов А.И., Пилипюк С.А., Соколов А.И. // Хим. физика. 1994. **13**, № 8–9. С. 217.
8. Елецкий А.В., Старостин А.Н. // Физика плазмы. 1975. **1**, № 4. С. 684.
9. Кулага Е.В., Осипов А.И., Уваров А.В., Юнис С.М. // Хим. физика. 1997. **16**, № 5. С. 3.
10. Осипов А.И., Рубинский Д.Б., Уваров А.В. // Теплофиз. высоких температур. 1999. **37**, № 5. С. 738.

Поступила в редакцию
23.04.01