

УДК 53 : 51

НАГРЕВ СТАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ В КОНЕЧНОМ СОЛЕНОИДЕ

Р.В. Будник, В.Б. Гласко

(кафедра математики)

E-mail: budnik@narod.ru

Рассматривается пространственно-двумерная аксиально-симметричная модель нагрева стальных цилиндрических образцов в соленоидальном индукторе. С помощью построенной модели изучаются краевые эффекты ослабления нагрева, возникающие вблизи торцов, связанные с рассеянием магнитного поля. Предлагаются различные способы оптимизации нагрева с целью устранения краевых эффектов.

При нагреве токами высокой частоты [1] стальных цилиндров образец помещается в соленоидальный индуктор с переменным током. Магнитное поле соленоида индуцирует в образце токи Фуко, которые и нагревают его за достаточно короткое время. Так как ток в обмотке соленоида и, следовательно, токи Фуко имеют высокую частоту, то вследствие сильного скин-эффекта нагрев происходит в основном вблизи поверхности. В настоящей работе рассчитывается глубина приповерхностного прогрева образца до температуры аустенитных превращений A_{c3} для индуктора конечной длины, т. е. рассматривается пространственно-двумерная задача. Аналогичная задача в одномерном случае для образца и индуктора бесконечной длины была рассмотрена в работе [2]. В двумерной же модели оказывается возможным учет краевых эффектов, возникающих вблизи торцов образца и проявляющихся в уменьшении толщины прогретого слоя.

Предлагается несколько способов оптимизации или эффективного управления процессом нагрева с учетом краевых эффектов с помощью подбора управляющих параметров. В качестве таких параметров рассматриваются отношение длины соленоидального индуктора к длине помещенного в него образца и функция зависимости силы тока в индукторе от времени. Влияние этих управляющих факторов рассматривается отдельно, так как они действуют на процесс нагрева по-разному и практически независимо друг от друга.

Варьирование геометрических параметров установки влияет на характер прогрева образца вдоль его оси. Различные способы такого варьирования, изученные в работе [3], показали, что с помощью увеличения длины соленоида по сравнению с длиной образца можно наиболее эффективно добиться равномерного прогрева с любой заданной точностью.

Подбором другого параметра — зависимости силы тока в индукторе от времени — можно с минимальными энергетическими затратами добиться прогрева образца до температуры аустенитных превращений на требуемую глубину в любом отдельно взятом сечении.

Для изучения краевых эффектов и поиска способов наиболее эффективного управления был разработан алгоритм, позволяющий рассчитать тепловое распределение в образце при заданных управляющих параметрах и автоматически оптимизировать функциональную зависимость силы тока в индукторе от времени при заданной относительной длине индуктора.

1. Будем рассматривать цилиндрические образцы длиной $2L$ с радиусом R , помещенные в соленоидальный индуктор длиной $2L_S$ с быстропеременным током частоты F . В качестве материала образца рассматривается сталь марки 40, экспериментальные данные для которой (теплопроводность λ , теплоемкость c , плотность γ и проводимость σ) взяты из работы [4]. Магнитная проницаемость μ , претерпевающая резкий скачок в узком интервале температур около точки Кюри $\theta \sim 750^\circ\text{C}$ между двумя постоянными значениями: от $\mu = 100$ Гс/Э ($u < \theta$) до $\mu = 1$ Гс/Э ($u > \theta$), на этом интервале аппроксимирована линейной функцией.

Математическая модель процесса нагрева описывается системой нелинейного уравнения теплопроводности и уравнений Максвелла. Для упрощения будем считать, что электромагнитная волна, отраженная от образца, отсутствует и падающая волна без потерь проникает в него. В этом случае для нахождения электрического поля внутри образца в качестве граничных условий выберем сохранение тангенциальной компоненты магнитного поля.

Зависимость магнитного поля на поверхности образца от времени описывается функциями $H_\tau(r, t)|_{z=\pm L}$ и $H_\tau(z, t)|_{r=R}$, которые ищутся в виде

$$H_\tau(r, t)|_{z=\pm L} = f_{\pm L}(r)I(t), \quad H_\tau(z, t)|_{r=R} = f_R(z)I(t), \quad (1)$$

где $I(t)$ — плотность силы тока в обмотке соленоида, $f_R(z)$, $f_{\pm L}(r)$ — функции, описывающие зависимость напряженности магнитного поля на поверхности образца от координаты вдоль его оси и радиуса соответственно. Они постоянны для данных геометрических параметров индуктора и определяются путем интегрирования магнитного поля одного витка

вдоль всего соленоида:

$$\mathbf{H}(r, z) = \int_{-L_S}^{L_S} \mathbf{h}(r, z - \xi) d\xi,$$

где $\mathbf{h}(r, z) = \{h_r, 0, h_z\}$ — магнитное поле одного витка с током [5].

При вычислении электрического поля в образце пренебрежем токами смещения вследствие высокой проводимости стали, а поскольку коэффициент μ постоянен везде, за исключением малой окрестности точки Кюри, где магнитная проницаемость резко меняется, отбросим член с производными функции μ . Коэффициенты уравнений Максвелла зависят от температуры u , однако, как следует из [2], для заданных характеристик материала можно без значительной потери точности при расчете температурных полей ограничиться «локально-стационарным» приближением, в котором температура рассматривается как параметр. Учитывая также достаточно короткое время нагрева, будем считать теплообмен с внешней средой пренебрежимо малым, что было подтверждено в работе [2].

Поскольку скорости распространения тепловых и электромагнитных волн несоизмеримы, можно утверждать, что на температурное поле влияют лишь средние по периоду величины плотности тепловых источников $Q(r, z, t) = 0.12\rho(u)j^2$, вызванных токами Фуко высокой частоты j . В этом случае усреднение уравнений по периоду быстро осциллирующих электрического $\mathbf{E}(r, z, t) = \mathbf{W}(r, z) e^{i\omega t}$ и магнитного $\mathbf{H}(r, z, t) = \mathbf{V}(r, z) e^{i\omega t}$ полей приводит к более простому уравнению для медленно меняющейся во времени комплексной амплитуды электрического поля $\mathbf{W}(r, z)$, имеющей в такой постановке задачи только азимутальную компоненту $W_\varphi(r, z)$.

В результате предлагаемая математическая модель нагрева описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial z^2} - \left(i\sigma\mu\omega + \frac{1}{r^2} \right) W_\varphi = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + Q(r, z, t) = c(u)\gamma(u) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3)$$

$$|W_\varphi| < \infty, \quad W_\varphi|_{r=0} = 0,$$

$$\frac{\partial W_\varphi}{\partial z} \Big|_{z=\pm L} = i\omega\mu V_r, \quad \frac{W_\varphi}{R} + \frac{\partial W_\varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = i\omega\mu V_z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\pm L} = 0, \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = u_0,$$

$$Q(r, z, t) = 0.12 \frac{1}{\rho(u)} |W_\varphi|^2.$$

Уравнение (2) имеет явное решение в виде сходящегося ряда Фурье, которое может быть легко най-

дено в любой точке образца. Уравнение (3) решается разностным методом переменных направлений [6].

2. Второй управляющий параметр процесса нагрева — зависимость силы тока в соленоиде от времени $I(t)$ — изучается независимо от геометрических параметров, так как практически не влияет на распределение толщины прогретого до температуры $A\sigma z$ слоя вдоль оси образца. Таким образом, вопрос о нахождении параметра $I(t)$ решается аналогично одномерному случаю [2], т.е. задача обеспечения наилучшего прогрева образца по глубине при наименьших затратах энергии ставится в некотором отдельно взятом сечении образца $z_0 = \text{const}$.

Для удобства изучения краевых эффектов выберем центральное сечение, так как в этом случае большая центральная часть образца будет прогрета на требуемую глубину, задаваемую параметрами нагрева, а толщина прогретого слоя в приторцевых областях будет составлять часть ее, что позволит непосредственно рассматривать эффект недостаточного прогрева. Кроме того, такой выбор сечения наиболее соответствует одномерной модели бесконечно длинного образца и индуктора, рассмотренной в работе [2], что позволяет сравнивать полученные результаты для различных моделей. Если же выбрать торцевое сечение, то можно обеспечить требуемый прогрев на торцах, но в этом случае в центральной области возникнет некоторый перегрев, что может привести при охлаждении как к увеличению закаленного слоя, так и к его уменьшению (вследствие того, что закалка происходит при достаточно быстром охлаждении, чему может препятствовать поток тепла из центра образца).

С целью обеспечения наилучшего прогрева в выбранном сечении потребуем, чтобы температура на поверхности $u(R, z_0, t) = \varphi(t)$ имела заданную зависимость от времени $\tilde{\varphi}(t)$, разделенную на стадии равномерного нагрева и изотермической выдержки. Такая температурная зависимость позволяет, с одной стороны, не допустить перегрева образца, а с другой — гибко управлять процессом нагрева при малом числе изменяемых параметров, таких, как температура изотермической выдержки, время нагрева и время выдержки. Таким образом, необходимо найти управляющую функцию $I(t)$ из формулы (1) по заданной зависимости температуры на поверхности $\tilde{\varphi}(t)$. Эта задача относится к классу обратных задач типа управления [7] и ее решение ищется с помощью теории регуляризации [8].

Для решения поставленной обратной задачи временной интервал $[0, T]$ разбивается на сегменты $[\tau_s, \tau_{s+1}]$, в пределах которых управляющая функция ищется в виде постоянной величины I_s исходя из условия минимума функционала

$$F_s(I_s) = \int_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} (\varphi(\tau, I_s) - \tilde{\varphi}(\tau))^2 d\tau,$$

который характеризует отклонение температуры на поверхности $\varphi(\tau, I_s)$ при данном значении I_s от

требуемой $\tilde{\varphi}(\tau)$. Эта нелинейная вариационная задача решается при начальном приближении $I = I_{s-1}$ методом спуска, аналогичным примененному в работе [2].

Для описанного выше алгоритма был разработан комплекс программ, позволяющий рассчитать температурное поле нагреваемого образца при заданных геометрических параметрах установки и найти наилучший вид управляющей функции силы тока в индукторе. Были проведены оценки этих параметров и даны рекомендации для устранения краевых эффектов.

3. С помощью разработанных программ был проведен ряд математических экспериментов. Рассмотрим некоторые результаты.

На рис. 1 изображены зависимости толщины прогретого до температуры A_{c3} слоя от координаты z после 50-секундного нагрева при различных значениях длины соленоида. По этому рисунку можно оценить длину индуктора, необходимую для требуемого прогрева, и дополнительные энергетические затраты, которые для этого потребуются. Коэффициент этих затрат: $K = \Delta P/P_0 = P - P_0/P_0$, где P_0 — мощность, потребляемая соленоидом, длина которого совпадает с длиной образца, P — мощность, потребляемая рассматриваемым соленоидом с уменьшенным краевым эффектом.

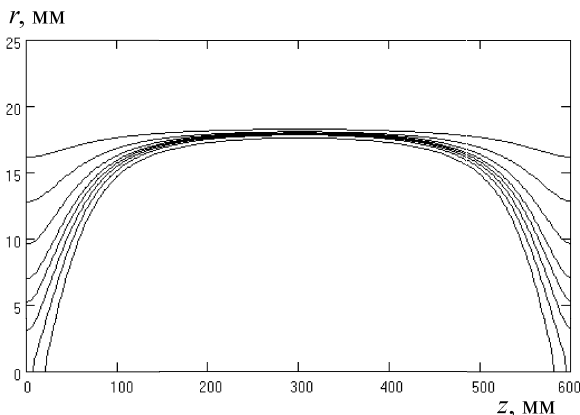


Рис. 1. Графики зависимостей толщины слоя, прогретого выше температуры A_{c3} , от координаты вдоль оси при различной длине соленоида и величине дополнительных энергетических затрат (снизу вверх): $2L = 600$ мм, $K = 0$; 610 мм, 1.7%; 620 мм, 3.3%; 630 мм, 5%; 640 мм, 6.7%; 660 мм, 10%; 700 мм, 16.7%; 800 мм, 33%

Зависимость плотности силы тока в индукторе, необходимая для обеспечения требуемой температуры на поверхности образца $\tilde{\varphi}(t)$, приведена на рис. 2, а полученная в результате такого нагрева температура $\varphi(t)$ — на рис. 3. Из графиков видно, что разность температур между точками на поверхности торцевого и центрального сечения возрастает при нагреве и слабо меняется при выдержке. При этом кратковременное выравнивание температуры происходит вследствие того, что температура на поверхности в центральном сечении переходит через точку Кюри, после чего магнитная проницаемость

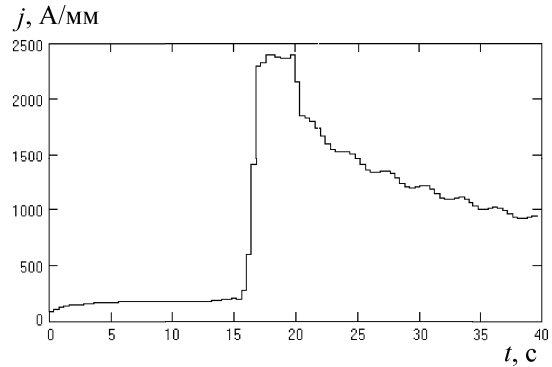


Рис. 2. Зависимость плотности силы тока в индукторе от времени, обеспечивающая наилучший прогрев, которая найдена путем решения обратной задачи

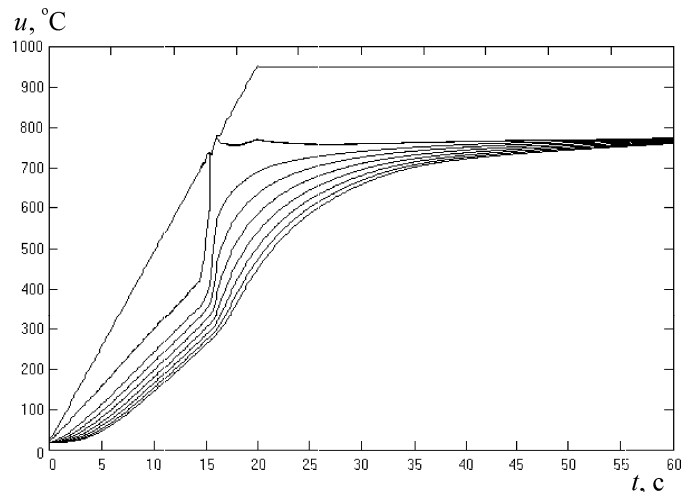


Рис. 3. Изменение температуры на поверхности образца с радиусом 20 мм от времени при нагреве в обычном индукторе. Верхний график соответствует точке в центральном сечении на поверхности образца, остальные — точкам в приторцевом сечении на расстоянии от оси 20, 18, 16, 14, 12, 10, 6 и 0 мм

в рассматриваемой области резко падает (в 100 раз) и для поддержания заданной скорости нагрева требуется резко увеличить плотность силы тока в индукторе (это соответствует скачку плотности силы тока на рис. 2). Но так как в приторцевой области температура еще не перешла через точку Кюри и здесь магнитная проницаемость осталась высокой, температура этой области резко возрастает.

Для выбора оптимального режима закалки необходимо знать глубину приповерхностного слоя, который нагревался выше температуры фазовых превращений. Некоторые результаты исследования зависимости этой глубины от температуры и времени изотермической выдержки представлены на рис. 4.

Кривые зависимостей толщины прогретого до температуры A_{c3} приторцевого слоя от времени для различных длин индуктора изображены на рис. 5.

Итак, равномерного прогрева можно достичь, варьируя несколько параметров: 1) изменяя длину соленоида, что непосредственно ослабляет краевой эффект рассеяния магнитного поля вблизи торца образца; 2) увеличивая время изотермической

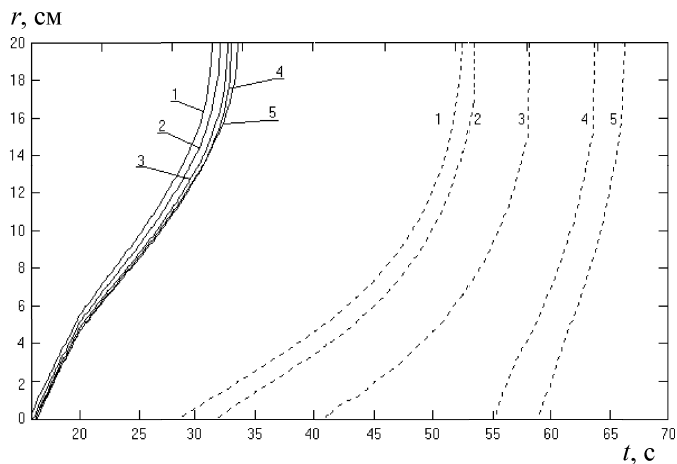


Рис. 4. Зависимости глубины слоя, прогретого до температуры A_{c3} , от времени изотермической выдержки образца при разных температурах. Длина индуктора равна длине образца, радиус образца 20 мм. Сплошные кривые соответствуют центральному сечению, пунктирные — сечению вблизи торца. Температура изотермической выдержки и коэффициент энергетических затрат: 1040°C, 80% (1); 1020°C, 81% (2); 1010°C, 82% (3); 1000°C, 82.5% (4); 980°C, 83% (5)

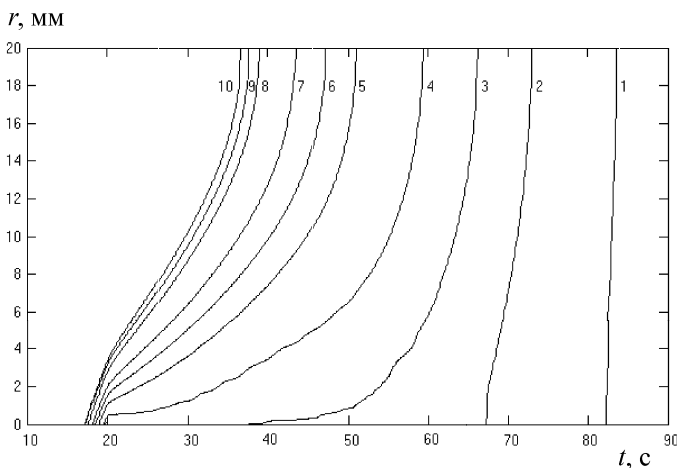


Рис. 5. Зависимости толщины прогретого до температуры A_{c3} приторцевого слоя от времени при нагреве для соленоидов разной длины. Радиус образца 20 мм, температура изотермической выдержки 950°C. Длина соленоида и коэффициент энергетических затрат: 2L = 600 мм, K = 100% (1); 604 мм, 89% (2); 608 мм, 80% (3); 610 мм, 77% (4); 620 мм, 75% (5); 630 мм, 73% (6); 640 мм, 71% (7); 660 мм, 69% (8); 700 мм, 71% (9); 800 мм, 80% (10)

выдержки, что приводит к выравниванию температуры за счет процесса теплопроводности; 3) увеличивая температуру изотермической выдержки.

Следует также отметить, что при увеличении времени выдержки сначала происходит полный прогрев образца в глубину и лишь затем до температуры A_{c3} прогреваются торцы, в случае же увеличения длины соленоида торцы прогреваются сразу.

Однозначный выбор способа оптимизации нагрева образца можно сделать только при рассмотрении

процесса охлаждения, однако для предварительного сравнения описанных выше методов полезно ввести критерий эффективности — энергетические затраты, необходимые для полного прогрева образца до температуры A_{c3} (по осям r и z). Измерять эти затраты будем в процентах от затрат, необходимых для полного прогрева образца в индукторе равной ему длины. Время нагрева будем считать равным 20 с, температуру изотермической выдержки — 950°C, радиус образца — 20 мм.

Рассмотрение этого критерия (рис. 5) показывает, что и удлинение соленоида, и увеличение температуры изотермической выдержки позволяют уменьшить энергетические затраты, при этом наилучшие показатели достигаются при удлинении соленоида примерно на 5 см с каждой стороны. Заметим также, что увеличение температуры изотермической выдержки хотя и позволяет добиться экономии энергии, но вызывает чрезмерный нагрев образца, что может негативно сказаться на глубине закалки при быстром охлаждении.

Выбранный критерий позволяет лишь условно оценить методы нагрева, так как не всегда необходим полный прогрев образца в глубину. Чтобы сделать окончательный выбор режима нагрева для закалки, следует изучить влияние параметров процесса охлаждения на структурные превращения в прогретом слое (это является предметом дальнейших исследований).

Авторы признательны профессору В.Д. Кальнеру за полезные обсуждения.

Литература

1. Вологдин В.П. Поверхностная закалка индукционным способом. Л.; М.: Metallurgizdat, 1939.
2. Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. М.: Машиностроение, 1990.
3. Будник Р.В., Гласко В.Б. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 4. С. 45 (Moscow University Phys. Bull. 2002. No. 4. P. 56).
4. Варгафтик Н.Б. Теплофизические свойства веществ. М.; Л.: Техноэнергоиздат, 1956.
5. Смайт В.Р. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954.
6. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
7. Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 15.10.01