

Автор благодарен Д.В. Тихомирову за любезно предоставленные иллюстрации и профессору А.Г. Попову за полезное обсуждение работы.

Литература

1. Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наукова думка, 1984.
2. Хуберт А. Теория доменных стенок в упорядоченных средах. М.: Мир, 1977.
3. Skyrme T.H.R. // Proc. Roy. Soc. 1981. **A262**. P. 237.
4. Позняк Э.Г., Попов А.Г. // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1991. Т. 23. С. 99.

5. Попов А.Г. Точное решение основных уравнений теории поверхностей для односолитонного решения уравнения sin-Гордона: Деп. ВИНТИ № 4336-B86 от 12.06.86.
6. Bianchi L. Lezioni di geometria differenziale. Vol. 1, Parte 2. Bologna, 1927.
7. Тихомиров Д.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 1. С. 19 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 1. P. 20).

Поступила в редакцию
21.11.01

УДК 517.958; 621.372.8

ПОВЕДЕНИЕ ВЛОЖЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

М.Д. Малы

(кафедра математики)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Приведен пример задачи, близкой к спектральной задаче теории волноводов со вставкой, вложенные собственные значения которой исчезают при малом изменении коэффициентов, характеризующих заполнение. Рассмотрение этой задачи основано на методе Фубини.

В настоящее время известны многочисленные примеры волноведущих систем, обладающих собственными значениями, вложенными в непрерывный спектр [1–6]. Однако не вполне ясно, сохранятся ли они при малом изменении границы или заполнения волновода, поскольку в общем случае вложенное собственное значение при малых возмущениях может превращаться в комплексный резонанс [4, 7, 8].

В настоящей работе рассмотрен простой пример спектральной задачи, у которой исчезают вложенные собственные значения, а именно:

$$\begin{cases} u'' + (k^2 q(x) - \alpha)u = k^2 p(x)v, \\ v'' + (k^2 q(x) - \beta)v = k^2 p(x)u. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\alpha < \beta$, а функции $q(x) - 1$ и $p(x)$ — аналитические функции, регулярные в любой конечной точке вещественной оси и убывающие быстрее любой экспоненты.

Эта задача является модельным приближением для изучения спектральной задачи

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 q(x, y)u = 0, \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = 0, \\ u \in L_2(\Omega) \end{cases} \quad (2)$$

в полом волноводе постоянного сечения

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1, \quad y \in [0, \pi]\},$$

заполненном неоднородным веществом, которое характеризуется кусочно-постоянной функцией $q(x, y)$.

В силу полноты системы тригонометрических функций решение (2) всегда можно представить в виде

$$u(x, y; k) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x; k) \sin(ny),$$

причем $u_n(x) \in L^2(\mathbb{R}^1) \cap C^1$. Подставляя это выражение в (2), получим вместо (2) бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u_n'' - n^2 u_n + k^2 \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m} u_m = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^1} dx |u_n(x)|^2 < \infty, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$q_{n,m}(x) = \int_S dy q(x, y) \sin(ny) \sin(my).$$

Нетрудно видеть, что задача (1) является весьма частным случаем задачи (3), однако можно надеяться, что и она передает характерные особенности поведения спектра задачи (2).

Предположим, что у задачи (1) существует вложенное собственное значение $k^2 \in (\alpha, \beta)$ и ему отвечает собственная функция $(u_1(x), v_1(x)) \in L^2(\mathbb{R}^1)$. Система (1) имеет еще три линейно-независимых

решения $(u_n(x), v_n(x))$ ($n = 2, 3, 4$). Перепишав (1) в виде системы уравнений первого порядка и применив к ней теорему Линделефа [9], видим, что все четыре решения задачи (1) растут не быстрее экспоненты. Это позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 1. Если решение (u_1, v_1) задачи 1 принадлежит $L^2(\mathbb{R})$ и $u(x)_1 \neq 0$, то у задачи 1 имеется другое решение, которое (само или его первая производная) стремится к бесконечности.

Доказательство. Пусть (u_n, v_n) ($n = 2, \dots, 4$) — оставшиеся три линейно-независимых решения 1 и пусть $u(x_0) \neq 0$. Составим матрицу

$$\mathfrak{W} = \begin{pmatrix} u_1, u'_1, v_1, v'_1 \\ u_2, u'_2, v_2, v'_2 \\ u_3, u'_3, v_3, v'_3 \\ u_4, u'_4, v_4, v'_4 \end{pmatrix}$$

и заметим, что ее определитель не зависит от x .

Из уравнений

$$\begin{cases} v''_n + (k^2 q(x) - \alpha) v_n = k^2 p(x) u_n, \\ v''_m + (k^2 q(x) - \alpha) v_m = k^2 p(x) u_m \end{cases}$$

следует, что

$$v_n v''_m - v_m v''_n = k^2 p(x) (u_m v_n - u_1 v_m)$$

или

$$\frac{d}{dx} W[v_n, v_m] = k^2 p(x) \begin{vmatrix} v_n(x), & v_m(x) \\ u_n(x), & u_m(x) \end{vmatrix}.$$

Так как u_m, u_n, v_m, v_n растут не быстрее экспоненты, то $p(x)$ убывает быстрее и, значит, $W[v_n, v_m](x)$ все время остаются меньше некоторой константы C .

Аналогично

$$\frac{d}{dx} W[u_n, u_m] = -k^2 p(x) \begin{vmatrix} v_n(x), & v_m(x) \\ u_n(x), & u_m(x) \end{vmatrix},$$

поэтому предел $W[u_1, u_m] \rightarrow W^\pm$, когда $x \rightarrow \pm\infty$, существует и равен

$$W[u_n, u_m](x) = W^\pm - k^2 \int_{\pm\infty}^x p(x) \begin{vmatrix} v_n(x), & v_m(x) \\ u_n(x), & u_m(x) \end{vmatrix} dx.$$

Предположим, что все определители Вронского $W[u_1, u_m]$ стремятся к нулю, когда $x \rightarrow \pm\infty$. Так как $p(x)$ убывает быстрее любой экспоненты, а u_1, u_2 растут не быстрее некоторой экспоненты, то

$$\left| k^2 p(x) \begin{vmatrix} v_n(x), & v_m(x) \\ u_n(x), & u_m(x) \end{vmatrix} \right| \leq P_0 e^{-\gamma x}, \quad x > x_0,$$

при любом γ , если взять x_0 достаточно большим. Тогда при $x > x_0$

$$|W[u_1, u_m](x)| \leq \int_x^\infty P_0 e^{-\gamma x} dx = \frac{P_0}{\gamma} e^{-\gamma x},$$

т. е. $W[u_1, u_m]$ убывает быстрее любой экспоненты. Но поскольку, например,

$$W[u_2, u_3] = \frac{1}{u_1} (u_2 W[u_1, u_3] - u_3 W[u_1, u_2]),$$

все $W[u_n, u_m]$ стремятся к нулю и в силу ограниченности $W[v_n, v_m](x)$ определитель $|\mathfrak{W}|$ тоже стремится к нулю, что невозможно ввиду того, что он вообще не зависит от x . Значит, предположение о том, что все $W[u_1, u_m] \rightarrow 0$, когда $x \rightarrow \pm\infty$, неверно, и поэтому u_m должна неограниченно возрастать, чтобы скомпенсировать убывание u_1 . ■

Однако, с другой стороны, оценив любое решение $(u(x), v(x))$ системы (1) по методу Фубини [10], можно показать, что все u_m ограничены.

Теорема 2. Все решения задачи (1) и их первые производные ограничены на всей вещественной оси.

Доказательство. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения уравнения

$$u'' + (k^2 q(x) - \alpha) u = 0$$

с вронскианом $W = 1$, а $v_1(x)$ и $v_2(x)$ — решения уравнения

$$v'' + (k^2 q(x) - \beta) v = 0$$

с вронскианом $W = 1$. Будем искать решение (1) методом вариации постоянных. Положим

$$\begin{cases} u = a_1(x) u_1(x) + a_2(x) u_2(x), \\ v = b_1(x) v_1(x) + b_2(x) v_2(x), \end{cases}$$

тогда имеем:

$$\begin{cases} a_1(x) = \gamma_1 - k^2 \int_0^x d\xi u_2(\xi) p(\xi) v(\xi), \\ a_2(x) = \gamma_2 + k^2 \int_0^x d\xi u_1(\xi) p(\xi) v(\xi), \\ b_1(x) = \gamma_3 - k^2 \int_0^x d\xi v_2(\xi) p(\xi) v(\xi), \\ b_2(x) = \gamma_4 + k^2 \int_0^x d\xi v_1(\xi) p(\xi) v(\xi), \end{cases}$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ — постоянные интегрирования. Значит, функции u и v выражаются одна через другую:

$$\begin{cases} u(x) - k^2 \int_0^x d\xi \mathfrak{L}(x, \xi) p(\xi) v(\xi) = \gamma_1 u_1(x) + \gamma_2 u_2(x), \\ v(x) - k^2 \int_0^x d\xi \mathfrak{M}(x, \xi) p(\xi) u(\xi) = \gamma_3 v_1(x) + \gamma_4 v_2(x), \end{cases}$$

где

$$\mathfrak{L}(x, \xi) = \begin{vmatrix} u_1(\xi), & u_2(\xi) \\ u_1(x), & u_2(x) \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}(x, \xi) = \begin{vmatrix} v_1(\xi), & v_2(\xi) \\ v_1(x), & v_2(x) \end{vmatrix}.$$

Отсюда для u получается уравнение Вольтерра:

$$u(x) - k^4 \int_0^x d\eta \mathfrak{k}(x, \eta) u(\eta) = F(x) \quad (4)$$

с ядром

$$\mathfrak{k}(x, \eta) = \int_{\eta}^x d\xi \mathfrak{L}(x, \xi) p(\xi) \mathfrak{M}(\xi, \eta) p(\eta)$$

и правой частью

$$F(x) = \gamma_1 u_1(x) + \gamma_2 u_2(x) + k^2 \int_0^x d\xi \mathfrak{L}(x, \xi) p(\xi) [\gamma_3 v_1(\xi) + \gamma_4 v_2(\xi)].$$

Если $k^2 \in (\alpha, \beta)$, то функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ равномерно при всех x ограничены некоторой константой C , поэтому и $|\mathfrak{L}(x, \xi)| < C^2$ при всех x и ξ . Хотя функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ могут возрастать неограниченно, но в силу того, что $p(x)$ убывает быстрее любой экспоненты, найдется такая функция $P(x)$, убывающая столь же быстро, что $|p(\xi) \mathfrak{M}(\xi, \eta) p(\eta)| < P(\xi) P(\eta)$. Поэтому ядро уравнения Вольтерра удовлетворяет неравенству

$$|k(x, \eta)| < P(\eta) C^2 \int_0^x d\xi P(\xi) \leq C'' P(\eta),$$

где

$$C'' = C^2 \int_0^{\infty} d\xi P(\xi)$$

при всех x и η . В силу леммы об интегральных уравнениях Вольтерра [10] решение уравнения (4) удовлетворяет неравенству

$$|u(x) - F(x)| \leq k^4 C'' J_1(x) \exp[k^4 C'' J_2(x)], \quad (5)$$

где интегралы

$$J_1(x) = \int_0^x P(y) dy \quad \text{и} \quad J_2(x) = \int_0^x P(y) |F(y)| dy$$

ограничены равномерно некоторой константой C''' .

Остается заметить, что функция $F(x)$ ограничена на вещественной оси. В самом деле, с учетом выражения для $\mathfrak{L}$ имеем:

$$\begin{aligned} F &= \gamma_1 u_1(x) + \gamma_2 u_2(x) + \\ &+ k^2 \int_0^x d\xi \mathfrak{L}(x, \xi) p(\xi) [\gamma_3 v_1(\xi) + \gamma_4 v_2(\xi)] = \\ &= \left(\gamma_1 - k^2 \int_0^x d\xi u_2(\xi) p(\xi) [\gamma_3 v_1(\xi) + \gamma_4 v_2(\xi)] \right) u_1(x) + \\ &+ \left(\gamma_2 + k^2 \int_0^x d\xi u_1(\xi) p(\xi) [\gamma_3 v_1(\xi) + \gamma_4 v_2(\xi)] \right) u_2(x). \end{aligned}$$

В силу ограниченности интегралов эта функция — ограниченная на всей вещественной оси. Таким образом, в силу оценки (5) и функция $u(x)$ — ограниченная на всей вещественной оси.

Дифференцируя (4), получим уравнение Вольтерра для $u'(x)$ и тем же приемом докажем ограниченность $u'(x)$ на всей вещественной оси. ■

Сравнивая теоремы 1 и 2, видим, что при $p(x) \not\equiv 0$ все принадлежащие L^2 собственные функции $(u(x), v(x))$ задачи (1), соответствующие собственному значению $k^2 \in (\alpha, \beta)$, удовлетворяют равенству $u(x) \equiv 0$, которое в силу (1) приводит к тождеству $p(x)v(x) \equiv 0$. Поскольку функция $p(x)$ — аналитическая, это тождество означает, что и $v(x) \equiv 0$. Иными словами, если $p(x) \not\equiv 0$, то у задачи (1) нет вложенного собственного значения. Заметим теперь, что при $p(x) \equiv 0$ задача (1) может иметь вложенное собственное значение вида $(0, v(x))$, если $q(x) - 1 > 0$ и достаточно мало [5]. Значит, малейшее возмущение $p(x)$ приведет к исчезновению этого собственного значения. Таким образом, задача (1) действительно является примером такой задачи, у которой пропадают вложенные собственные значения при малом возмущении коэффициентов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-01-00111) и программы «Университеты России» (грант 015.03.02.001).

Литература

1. Jones D.S. // Proc. Camb. Phil. Soc. 1954. **49**. P. 668.
2. Werner P. // Z. Angew. Math. Mech. 1987. **67**, No. 4. P. 43.
3. Evans D.V., Levitin M., Vassiliev D. // J. Fluid Mech. 1994. **261**. P. 21.
4. Davies E.B., Parnowski L. // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1998. **51**. P. 477.
5. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 5. С. 23 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 5. P. 29).
6. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 6. С. 69 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 6. P. 79).
7. Howland J.S. // Pacific J. Math. 1974. **55**, No. 1. P. 157.
8. Agmon S. // Comm. Pure Appl. Math. 1998. **51**, No. 11–12. P. 1255.
9. Painlevé P. // Bull. Soc. Math. France. 1899. **21**. P. 149.
10. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1965.

Поступила в редакцию
05.12.01