

УДК 517.947.42

# ЗАДАЧА ФИЗИКИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ СО СМЕШАННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ, ЗАДАННЫМ НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОДОВ, ЛЕЖАЩИХ ВДОЛЬ ПРЯМОЙ

К.В. Прозоров, П.А. Крутицкий

(кафедра математики)

E-mail: kprogorov@mail.ru

Рассмотрена краевая задача для периодических гармонических функций вне периодической системы прямолинейных разрезов на плоскости. При этом на одной стороне каждого разреза задано условие Дирихле, а на другой — условие с косой производной. С помощью теории краевых задач для аналитических функций построено явное решение задачи. Доказана единственность решения. Задача описывает распределение потенциала электрического поля в замагниченной полупроводниковой пленке с периодической системой прямолинейных электродов.

## Постановка задачи и теорема единственности

На плоскости в декартовых координатах  $x = (x_1, x_2)$  рассмотрим бесконечное число прямолинейных разрезов  $\Gamma_0, \Gamma_{\pm 1}, \Gamma_{\pm 2}, \dots$ , расположенных вдоль оси  $Ox_1$ , с периодом  $2\pi$ . Разрезы  $\Gamma_0, \Gamma_{\pm 1}, \Gamma_{\pm 2}, \dots$  представляют собой отрезки оси  $Ox_1$  с концами в точках  $2\pi m \pm a$ , где  $0 < a < \pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Совокупность отрезков  $\Gamma_m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , будем называть контуром  $\Gamma$ . За положительное направление обхода этого контура выберем направление оси  $Ox_1$ . Через  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  будем обозначать левый и правый берега  $\Gamma$ . Предельные значения функций на  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  будем обозначать индексами «+» и «-» соответственно.

Говорят, что функция  $u(x) = u(x_1, x_2)$  принадлежит классу гладкости  $H_\Gamma^0$ , если

1)  $u(x) \in C^0(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$ , т.е.  $u(x)$  непрерывна вне  $\Gamma$ , непрерывно продолжима на  $\Gamma$  слева и справа во всех точках, а также непрерывно продолжима на концы  $(2\pi m - a, 2\pi m + a)$  отрезков  $\Gamma_m$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

2)  $u_{x_1}, u_{x_2} \in C^0(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \setminus X)$ , где  $X$  — множество концов контура  $\Gamma$ ;

3) на концах разрезов функции  $u_{x_1}, u_{x_2}$  могут иметь интегрируемые особенности, т.е. при  $x \rightarrow d \in X$  справедлива оценка  $|u_{x_j}| \leq A|x - d|^\delta$ ,  $j = 1, 2$ , где константы  $\delta > -1$ ,  $A > 0$ .

Дадим математическую постановку задачи, которая изучается ниже.

**Задача  $\mathcal{K}$ .** Найти  $u(x) = u(x_1, x_2)$  из класса  $H_\Gamma^0$ , гармоническую вне  $\Gamma$ , удовлетворяющую условию периодичности

$u(x_1, x_2) = u(x_1 + 2\pi m, x_2)$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , граничным условиям

$$u^+(x_1, 0)|_{\Gamma^+} = Q_1(x_1), \quad (1)$$

$$u_{x_2}^-(x_1, 0)|_{\Gamma^-} - \beta u_{x_1}^-(x_1, 0)|_{\Gamma^-} = Q_2(x_1), \quad (2)$$

а также условиям

$$|u| < C, \quad |x_2| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$$u_{x_2} \rightrightarrows 0, \quad |x_2| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Через  $Q_1(x_1)$ ,  $Q_2(x_1)$  обозначены заданные на  $\Gamma$  действительные функции, такие, что  $Q_1(x_1) \in C^{1,\lambda}[-a, a]$ ,  $Q_2(x_1) \in C^{0,\lambda}[-a, a]$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ ;  $Q_{1,2}(x_1) = Q_{1,2}(x_1 + 2\pi m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Задача  $\mathcal{K}$  возникает при изучении эффекта Холла в полупроводниках [1, 2]. Условие (1) отвечает заданию потенциала, а (2) — заданию плотности нормального тока на сторонах разрезов (электродов) в полупроводниковой пленке, расположенной в постоянном магнитном поле.

**Теорема 1.** Если решение задачи  $\mathcal{K}$  существует, то оно единственно.

Доказательство основано на методе энергетических тождеств [2].

## Построение решения

Решение задачи  $\mathcal{K}$  будем строить методом, предложенным в [3]. Условие (1) эквивалентно следующим двум условиям:

$$u_{x_1}^+(x_1, 0)|_{\Gamma^+} = \tilde{Q}_1(x_1) \equiv Q_1'(x_1), \quad (5)$$

$$u(-a, 0) = Q_1(-a).$$

Перейдем от декартовой плоскости к комплексной:  $w = x_1 + ix_2$ . Возьмем функцию  $v(x)$ , сопряженную к  $u(x)$  в смысле соотношений Коши–Римана. Вообще говоря,  $v(x)$  — многозначная гармоническая функция. Рассмотрим многозначную аналитическую функцию

$$\Psi(w) = u(x) + iv(x). \quad (6)$$

В силу условий Коши–Римана

$$\Psi_w(w) = u_{x_1} - iu_{x_2} \equiv \Omega_0(w), \quad (7)$$

где  $\Omega_0(w)$  — однозначная аналитическая функция, так как сама функция  $u(x)$  и ее частные про-

изводные по  $x_1, x_2$  — однозначные гармонические функции.

Перепишем (2), (5) в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Omega_0(x_1, 0)|_{\Gamma^+} &= \tilde{Q}_1(x_1), \\ \operatorname{Re} [(i - \beta)\Omega_0(x_1, 0)]|_{\Gamma^-} &= Q_2(x_1). \end{aligned} \quad (8)$$

Потребуем, чтобы

$$|\Omega_0(w)| \rightarrow 0 \text{ при } |x_2| \rightarrow \infty, \quad (9)$$

тогда условие (4) будет выполнено.

Будем говорить, что аналитическая функция  $F(w)$  принадлежит классу  $h_\Gamma^0$ , если она кусочно-голоморфна с линией скачков  $\Upsilon$ , имеет конечный порядок на бесконечности, непрерывно продолжима на  $\Upsilon$  слева и справа во всех точках, за исключением концов  $\Upsilon$ , где может иметь интегрируемые особенности (см. п. 3 в определении  $H_\Gamma^0$ ).

Задача  $\mathcal{K}$  относительно функции  $u(x)$  сведена к задаче Римана–Гильберта относительно однозначной аналитической функции  $\Omega_0(w)$ .

**Задача  $\mathcal{R}_w$ .** Найти функцию  $\Omega_0(w)$  из класса  $h_\Gamma^0$ , удовлетворяющую условию периодичности  $\Omega_0(w) = \Omega_0(w + 2\pi n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , условиям на бесконечности (9) и граничным условиям (8).

Рассмотрим конформное отображение комплексной плоскости  $w$  на плоскость  $z$  такое, что  $z = \exp(iw)$ .

При этом разрезы  $\Gamma$  на плоскости  $w$  перейдут в разрез  $L$  вдоль единичной окружности:  $L = \{z: |z| = 1, -a < \arg z < a\}$ . Введем на плоскости  $z$  полярные координаты:  $|z|$  — полярный радиус и  $\theta = \arg z$  — полярный угол. При этом  $\Gamma^+$  переходит в  $L^+ = \{z: |z| = 1 - 0; \theta \in (-a, a)\}$ , а  $\Gamma^-$  — в  $L^- = \{z: |z| = 1 + 0; \theta \in (-a, a)\}$ .

Положим  $q_1(t) = \tilde{Q}_1(t)$ ,  $q_2(t) = Q_2(t)$ , где  $t = \exp(i\theta)$  и

$$\Phi(z) = \Omega_0(w(z)). \quad (10)$$

Тогда условия (8) преобразуются в следующие условия на  $L$ :

$$\operatorname{Re} \Phi^+(t)|_{L^+} = q_1(t), \quad \operatorname{Re} [(i - \beta)\Phi^-(t)]|_{L^-} = q_2(t), \quad (11)$$

где  $t = \exp(i\theta)$ ,  $\theta \in (-a, a)$ , и функция  $\Phi(z)$  должна принадлежать классу  $h_L^0$ . Задача Римана–Гильберта  $\mathcal{R}_z$  на плоскости  $z$ , соответствующая задаче  $\mathcal{R}_w$  на плоскости  $w$ , будет иметь следующий вид.

**Задача  $\mathcal{R}_z$ .** Найти функцию  $\Phi(z)$  из класса  $h_L^0$ , удовлетворяющую граничным условиям (11), а также условию  $\Phi(0) = \Phi(\infty) = 0$ .

Последнее условие в  $\mathcal{R}_z$  вытекает из (9). Задача Римана–Гильберта для функции  $\Phi(z)$  изучалась ранее [4–6]. Будем следовать работе [6]. Чертой сверху будем обозначать комплексное сопряжение. Так как условия (11) аналогичны следующим:  $\Phi^+(t) + \overline{\Phi^+(t)} = 2q_1(t)$  на  $L^+$ ,  $(i - \beta)\Phi^-(t) + \overline{(i - \beta)\Phi^-(t)} = 2q_2(t)$  на  $L^-$ , то, вводя функции  $\varphi_1(z) = \Phi(z)$ ,  $\varphi_2(z) = \varphi_{1*}(z) = \Phi(\overline{z}^{-1})$ ,

приходим к следующей векторной задаче сопряжения [6].

**Задача  $\mathcal{S}$ .** Найти вектор  $(\varphi_1(z), \varphi_2(z))$  такой, что функции  $\varphi_{1,2}$  принадлежат классу  $h_L^0$ , удовлетворяют граничным условиям на  $L$

$$\begin{aligned} \varphi_1^+(t) + \varphi_2^-(t) &= 2q_1(t), \\ (i - \beta)\varphi_1^-(t) + (-i - \beta)\varphi_2^+(t) &= 2q_2(t) \end{aligned} \quad (12)$$

и  $\varphi_j(0) = \varphi_j(\infty) = 0$ ,  $j = 1, 2$ .

Согласно [7], всякое решение  $(\varphi_1(z), \varphi_2(z))$  задачи  $\mathcal{S}$  порождает решение  $\Phi(z)$  задачи  $\mathcal{R}_z$ :

$$(\varphi_1(z) + \varphi_{2*}(z))/2 = \Phi(z). \quad (13)$$

Вводя новые неизвестные функции

$$\begin{aligned} \nu_1(z) &= C^{\frac{1}{4}}\varphi_1(z) + C^{-\frac{1}{4}}\varphi_2(z), \\ \nu_2(z) &= -C^{\frac{1}{4}}\varphi_1(z) + C^{-\frac{1}{4}}\varphi_2(z), \end{aligned} \quad (14)$$

сведем двумерную задачу  $\mathcal{S}$  к двум одномерным относительно  $\nu_1(z), \nu_2(z)$  с граничными условиями на  $L$ :

$$\nu_1^+(t) = G\nu_1^-(t) + C^{\frac{1}{4}}f_1(t) + C^{-\frac{1}{4}}f_2(t), \quad (15)$$

$$\nu_2^+(t) = -G\nu_2^-(t) - C^{\frac{1}{4}}f_1(t) + C^{-\frac{1}{4}}f_2(t), \quad (16)$$

где  $f_1(t) = 2q_1(t)$ ,  $f_2(t) = -2q_2(t)C^{\frac{1}{2}}/\sqrt{1 + \beta^2}$ ,  $C^{\pm\frac{1}{4}} = e^{\mp\frac{i}{4}\operatorname{arctg}\beta}$ ,  $G \equiv -C^{\frac{1}{2}} = -e^{-i\operatorname{arctg}\beta}$ . Функции  $\nu_{1,2}(z)$  должны принадлежать  $h_L^0$  и удовлетворять требованию  $\nu_j(0) = \nu_j(\infty) = 0$ ,  $j = 1, 2$ .

Решения таких одномерных задач сопряжения для  $\nu_1$  и  $\nu_2$  легко строятся в явном виде методами [3–5, 7].

Для соответствующих однородных задач сопряжения граничные условия на  $L$  имеют вид  $\psi_1^+(t) = G\psi_1^-(t)$ ,  $\psi_2^+(t) = -G\psi_2^-(t)$ .

Далее, введем обозначения  $T_1(z) = (z - e^{-ia})^\sigma \times (z - e^{ia})^{1-\sigma}$ ,  $T_2(z) = (z - e^{-ia})^{\frac{1}{2}+\sigma} \cdot (z - e^{ia})^{\frac{1}{2}-\sigma}$ , где  $\sigma = (1/2) - (1/2\pi)\operatorname{arctg}\beta$ . Используя их, можно написать канонические решения однородных задач:  $\psi_1(z) = i \exp[i(1/2 - \sigma)a]/T_1(z)$ ,  $\psi_2(z) = i \exp(-i\sigma a)/T_2(z)$ . Заметим, что эти решения удовлетворяют требованию  $(\psi_j(z))_* = z\psi_j(z)$ ,  $j = 1, 2$ .

Положим  $t = e^{i\theta}$  и введем функции

$$\Theta_1(\theta) = |\sin((\theta + a)/2)|^\sigma \cdot |\sin((\theta - a)/2)|^{1-\sigma}, \quad (17)$$

$$\Theta_2(\theta) = |\sin((\theta + a)/2)|^{\frac{1}{2}+\sigma} \cdot |\sin((\theta - a)/2)|^{\frac{1}{2}-\sigma}, \quad (18)$$

где  $\theta$  — азимутальный угол полярной системы координат. Тогда предельные значения  $\psi_{1,2}$  на  $L$  примут вид

$$\psi_1^\pm = -\frac{1}{2} \exp\left[\pm i\sigma\pi - \frac{i\theta}{2}\right] \cdot \frac{1}{\Theta_1(\theta)},$$

$$\psi_2^\pm = \mp \frac{i}{2} \exp\left[\pm i\sigma\pi - \frac{i\theta}{2}\right] \cdot \frac{1}{\Theta_2(\theta)}.$$

Исчезающие на бесконечности решения неоднородных задач сопряжения для  $\nu_1(z)$  и  $\nu_2(z)$  с граничными условиями (15), (16) выглядят так:

$$\nu_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \psi_j(z) \int_L \frac{z F_j(\xi)}{(\xi - z)\xi} d\xi + E_j \psi_j(z), \quad j = 1, 2, \quad (19)$$

где  $E_j$  — произвольные константы, а  $F_j(t) = [ -(-1)^j C^{\frac{1}{4}} f_1(t) + C^{-\frac{1}{4}} f_2(t) ] / \psi_j^+(t)$ . Указанные решения удовлетворяют всем условиям задач, кроме требований  $\nu_j(0) = 0$ ,  $j = 1, 2$ . Подберем константы  $E_1$ ,  $E_2$  так, чтобы эти требования выполнялись, тогда

$$E_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_1(\xi)}{\xi} d\xi, \quad E_2 = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_2(\xi)}{\xi} d\xi. \quad (20)$$

Подставив в (19) выражения (20), получаем

$$\nu_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \psi_j(z) \int_L \frac{z F_j(\xi)}{(\xi - z)\xi} d\xi, \quad j = 1, 2. \quad (21)$$

Теперь решение задачи  $\mathfrak{S}$  можно выписать по формулам (14), (21) через  $\nu_{1,2}$ . Пользуясь (13), выпишем решение задачи  $\mathfrak{R}_z$ :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} C^{-\frac{1}{4}} z \left\{ \psi_1(z) \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_1(\xi)}{(\xi - z)\xi} d\xi - \psi_2(z) \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_2(\xi)}{(\xi - z)\xi} d\xi \right\}.$$

Согласно (6), решение  $\mathfrak{K}$  будем искать в виде  $u(x) = \operatorname{Re} \Psi(w)$ . Воспользовавшись (7), (10), получим, что  $\Psi_w(w) = \Omega_0(w(z)) = \Phi(z)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \Psi(w) &= \int_{w_0}^w \Psi_w(w) dw + k = \int_{w_0}^w \Omega_0(w) dw + k = \\ &= \int_{z(w_0)}^{z(w)} \Phi(z) w'_z dz + k = -i \int_{z(w_0)}^{z(w)} \frac{\Phi(z)}{z} dz + k, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $z = \exp(iw)$ ,  $w = -i \ln(z)$ ,  $w'_z = -i/z$ ,  $k$  — произвольная комплексная постоянная. Напомним, что по построению  $\Phi(0) = 0$  и представим  $\Phi(z)/z$  в виде интеграла типа Коши:

$$\frac{\Phi(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{t - z} \frac{\rho(t)}{t} dt. \quad (23)$$

Пользуясь формулами Сохоцкого, находим

$$\begin{aligned} \rho(t_0) &= \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \\ &= \frac{1}{2} t_0 \left\{ \left( C^{-\frac{1}{4}} + C^{-\frac{3}{4}} \right) \psi_1^+(t_0) \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_1(\xi)}{(\xi - t_0)\xi} d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \left( C^{-\frac{3}{4}} - C^{-\frac{1}{4}} \right) \psi_2^+(t_0) \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_2(\xi)}{(\xi - t_0)\xi} d\xi \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( f_1 - \frac{f_2}{C} \right). \end{aligned}$$

Положим  $t_0 = \exp(i\theta_0)$  и  $\hat{\rho}(\theta_0) = \rho(t_0)$ , тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{\rho}(\theta_0) &= \\ &= \tilde{Q}_1(\theta_0) + \frac{\beta}{\beta^2 + 1} Q_2(\theta_0) - \frac{1}{\beta^2 + 1} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{4\pi \Theta_j(\theta_0)} \times \\ &\quad \times \int_{-a}^a \frac{\left( \sqrt{\beta^2 + 1} \cdot \tilde{Q}_1(\theta) + (-1)^j Q_2(\theta) \right) \Theta_j(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right)} d\theta, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \hat{\rho}(\theta_0) &= -\frac{Q_2(\theta_0)}{\beta^2 + 1} + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{4\pi \Theta_j(\theta_0)} \int_{-a}^a \left\{ \left( \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 1}} - (-1)^j \right) \tilde{Q}_1(\theta) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + 1}} - (-1)^j \frac{\beta}{\beta^2 + 1} \right) Q_2(\theta) \right\} \frac{\Theta_j(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right)} d\theta. \end{aligned} \quad (25)$$

Функции  $\Theta_1(\theta)$ ,  $\Theta_2(\theta)$  определены в (17), (18), а  $\tilde{Q}_1(\theta)$  — в (5).

Согласно (6), (22), (23), решение исходной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) &= \operatorname{Re} \Psi(w) = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{2\pi i} \int_L \frac{\rho(t)}{t} \ln[z(w) - t] dt \right\} + D, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $D$  — вещественная константа.

Рассмотрим функцию  $\ln[z(w) - t]$ . Поскольку  $z = e^{ix_1 - x_2}$ , а  $t = e^{i\theta_0}$ , то  $\ln[z(w) - t] = \ln r(x, \theta_0) + i\omega(x, \theta_0)$ , где

$$r(x, \theta_0) = (e^{-2x_2} + 1 - 2e^{-x_2} \cos(x_1 - \theta_0))^{\frac{1}{2}}. \quad (27)$$

Функция  $\omega(x, \theta_0)$  определена с точностью до  $2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , формулами

$$\begin{aligned} \sin \omega(x, \theta_0) &= (e^{-x_2} \sin x_1 - \sin \theta_0) / r(x, \theta_0), \\ \cos \omega(x, \theta_0) &= (e^{-x_2} \cos x_1 - \cos \theta_0) / r(x, \theta_0). \end{aligned} \quad (28)$$

При каждом фиксированном  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  под  $\omega(x, \theta_0)$  будем понимать любую фиксированную ветвь этой функции, которая непрерывно изменяется по  $\theta_0$  от  $-a$  к  $a$ .

Тогда  $u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \{ \operatorname{Re} \hat{\rho}(\theta_0) (\omega(x, \theta_0)) + \operatorname{Im} \hat{\rho}(\theta_0) \times \ln r(x, \theta_0) \} d\theta_0 + D$ . Поскольку ветвь  $\omega(x, \theta_0)$  определяется с точностью до  $2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , то функция  $u(x)$  будет однозначной только в том случае, если

$$\int_{-a}^a \operatorname{Re} \hat{\rho}(\theta_0) d\theta_0 = 0. \quad (29)$$

Покажем, что это условие выполнено. В соответствии с (23)

$$\Phi(z) = z \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{t-z} \cdot \frac{\rho(t)}{t} dt.$$

Следовательно, при  $|z| \rightarrow \infty$

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\rho(t)}{t} dt + O(|z|^{-1}).$$

Но по построению  $\Phi(\infty) = 0$ , поэтому

$$\int_L \frac{\rho(t)}{t} dt = 0. \quad (30)$$

Отсюда следует  $\int_{-a}^a \operatorname{Re} \hat{\rho}(\theta_0) d\theta_0 = \int_{-a}^a \operatorname{Im} \hat{\rho}(\theta_0) d\theta_0 = 0$ .

Тем самым условие (29) выполнено. Постоянную  $D$  найдем из условия  $u(a, 0) = Q_1(a)$ :

$$D = Q_1(a) + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left\{ \operatorname{Re} \hat{\rho}(\theta_0) \frac{\theta_0}{2} + \operatorname{Im} \hat{\rho}(\theta_0) \cdot \ln \left( 2 \sin \frac{a - \theta_0}{2} \right) \right\} d\theta_0.$$

В итоге получаем

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left\{ \operatorname{Re} \hat{\rho}(\theta_0) \left( \frac{\theta_0}{2} - \omega(x, \theta_0) \right) + \operatorname{Im} \hat{\rho}(\theta_0) \cdot \ln \left[ \frac{\sin \frac{a - \theta_0}{2}}{r(x, \theta_0)} \right] \right\} d\theta_0 + Q_1(a), \quad (31)$$

где  $\operatorname{Re} \hat{\rho}(\theta_0)$  и  $\operatorname{Im} \hat{\rho}(\theta_0)$  даются выражениями (24) и (25) и использованы функции из (27), (28). Легко проверить, что  $u(x) \in H_{\Gamma}^0$ . Покажем, что  $u(x)$  удовлетворяет условиям (3), (4), для этого используем

выражение для  $u(x)$  в виде (26). Если  $x_2 \rightarrow +\infty$ , то  $\ln(z(w) - t) = \ln(e^{ix_1 - x_2} - t) = \ln(-t) + o(1)$ ; здесь и далее через  $o(1)$  обозначены функции, которые равномерно стремятся к нулю при  $|x_2| \rightarrow \infty$ . Подставляя эту формулу в (26), докажем (3) при  $x_2 \rightarrow +\infty$ . Если  $x_2 \rightarrow -\infty$ , то  $\ln(z(w) - t) = \ln(e^{ix_1 - x_2} - t) = ix_1 - x_2 + o(1)$ . Подставляя это соотношение в (26) и используя (30), докажем (3) при  $x_2 \rightarrow -\infty$ . Тем самым функция  $u(x)$  удовлетворяет условию (3) при  $x_2 \rightarrow \pm\infty$ . Более того,

$$\lim_{x_2 \rightarrow \pm\infty} u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left\{ \mp \operatorname{Re} \hat{\rho}(\theta_0) \frac{\theta_0}{2} + \operatorname{Im} \hat{\rho}(\theta_0) \cdot \ln \left( \sin \frac{a - \theta_0}{2} \right) \right\} d\theta_0 + Q_1(a).$$

Перейдем к оценке (4). При  $|x_2| \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \ln(e^{ix_1 - x_2} - t) = -\frac{e^{ix_1 - x_2}}{e^{ix_1 - x_2} - t} = o(1).$$

Пользуясь представлением (26) и учитывая последнюю формулу, можно показать, что функция  $u(x)$  удовлетворяет условию (4).

Таким образом, решение задачи  $\mathfrak{K}$  построено. Справедлива

**Т е о р е м а 2.** *Решение задачи  $\mathfrak{K}$  существует и дается формулой (31).*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-01067) и INTAS (грант YSF 00-17).

#### Литература

1. Владимиров В.В., Волков А.Ф., Мейлихов Е.З. Плазма полупроводников. М.: Атомиздат, 1979.
2. Бушева Л.В., Крутицкий П.А. // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. **3**, № 3. С. 739.
3. Крутицкий П.А. // Матем. моделирование. 1990. **2**, № 9. С. 114.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
6. Крутицкий П.А. // ЖВМ и МФ. 1990. **30**, № 11. С. 1689.
7. Крутицкий П.А. // Матем. моделирование. 1990. **2**, № 4. С. 143.

Поступила в редакцию  
10.12.01