РАДИОФИЗИКА

УДК 519.246; 524

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ АНТЕННЫ В ДВУХМОДОВОМ РЕЖИМЕ

М.П. Виноградов, А.В. Гусев

(*ГАИШ*)

E-mail: avg@sai.msu.ru

Рассматривается параметрическая модель априорной неопределенности при обнаружении слабого сигнала резонансными гравитационными антеннами, работающими в двухмодовом режиме.

1. В состав современных гравитационных резонансных антенн входит механический трансформатор смещения. Трансформатор смещения, который можно рассматривать как механический аналог трансформатора импеданса в теории электрических цепей, обеспечивает согласование гравитационного детектора (высокодобротный механический резонатор) и малошумящего электродинамического преобразователя в режиме минимального шума.

При обобщенном анализе чувствительности гравитационной антенны с трансформатором смещения ее можно рассматривать как линейную систему с постоянными параметрами, имеющую две степени свободы. Пусть ω_1 и ω_2 — собственные частоты такой системы, причем $\omega_1 \leqslant \omega_2$. Тогда результирующий процесс $x(t)$ на выходе линейного тракта гравитационной антенны в двухмодовом режиме можно представить в виде суперпозиции $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ двух квазигармонических колебаний:

$$x_i(t) = \lambda s_i(t) + n_i(t) = R_i(t)\cos[\omega_i t + \vartheta_i(t)], \quad i = 1, 2,$$

где $s_i(t)$ и $n_i(t)$ — соответственно слабый полезный сигнал и аддитивная негауссова помеха в отдельной моде, $\lambda = (0, 1)$ — параметр обнаружения, $R_i(t)$ и $\vartheta_i(t)$ — огибающая и фаза квазигармонического колебания $x_i(t)$, причем

$$\left|\frac{d\ln R_i(t)}{dt}\right| \ll \Omega, \quad \left|\frac{d\vartheta_i(t)}{dt}\right| \ll \Omega, \quad i = 1, 2, \qquad (1)$$

$\Omega = (\omega_2 - \omega_1)/2 \ll \omega_{1,2}$ — частота биений. Случайные процессы $E_1(t) = R_1^2(t)$ и $E_2(t) = R_2^2(t)$ можно рассматривать как компоненты векторного выходного сигнала $\mathbf{E}(t) = [E_1(t), E_2(t)]$ резонансной гравитационной антенны с трансформатором смещения в двухмодовом режиме.

В настоящей работе для обработки выходного сигнала $\mathbf{E}(t)$ предлагается использовать амплитудно-частотный алгоритм [1, 2] подавления коррелированных негауссовых шумов при параметрической априорной неопределенности. Новыми элементами предлагаемого подхода по отношению к [2] являются: 1) расчет характеристики двухканального безынерционного нелинейного преобразователя при произвольной аддитивной помехе, 2) применение «обобщенного» бигауссова распределения для описания аномально-засоренных шумов на выходе гравитационной антенны в двухмодовом режиме.

2. При амплитудно-частотном подавлении негауссовых шумов в двухмодовом режиме для обработки векторного сигнала $\mathbf{E}(t)$ используется следующая схема:

$$\mathbf{E}(t) \to f[E_1(t), E_2(t)] \to v_{\text{opt}}(t) \to \sum_k v_{\text{opt}}(t_k + \delta t),$$

где $f[E_1, E_2]$ — оптимальная по критерию максимума отношения сигнал–шум характеристика безынерционного нелинейного преобразователя; $v_{\text{opt}}(t)$ — случайный процесс на выходе оптимального линейного фильтра, согласованного с отдельным гравитационным импульсом; t_k — моменты возникновения отдельных гравитационных импульсов, $k = \overline{1, N}$, $N \gg 1$; δt — временная задержка, вносимая системой регистрации.

Пусть $A_1(t) = \mu A_2(t)$ и $A_2(t) = A(t)$ — огибающие полезных узкополосных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ в отдельных модах, $W_{2E}(E_1, E_2, A_1, A_2) = W_{2E}(\cdot)$ — совместная плотность вероятности случайных процессов $E_1(t)$ и $E_2(t)$ в совпадающие моменты времени,

$$W_{2E}(\cdot) = \langle W_4(E_1, E_2, A_1, A_2, \Delta_1, \Delta_2)\rangle_\Delta\,,$$

где $W_4(E_1, E_2, A_1, A_2, \Delta_1, \Delta_2)$ — совместная плотность вероятности случайных процессов $E_i(t)$ и $\Delta_i(t)$ ($\Delta_i(t)$ — разность фаз между квазигармоническим процессом $s_i(t)$ и аддитивной узкополосной помехой $n_i(t)$ в отдельной моде), $i = 1, 2$; $\langle \ldots \rangle_\Delta$ — символическая форма записи оператора статистического усреднения по случайным параметрам Δ_1 и Δ_2. Тогда случайный процесс $E_i(t)$ можно представить в виде

$$E_i = e_i + 2A_i\sqrt{e_i}\cos\Delta_i + A_i^2, \quad j = 1, 2,$$

где $e_1(t)$ и $e_2(t)$ — квадраты огибающих узкополосных аддитивных помех $n_1(t)$ и $n_2(t)$. Будем рассматривать это выражение как квадратное уравнение относительно неизвестной переменной e_i. Тогда при обнаружении слабых гравитационных импульсов получим

$$e_i = E_i + \varepsilon_i,$$
$$\varepsilon_i = 2A_i\sqrt{E_i}\cos\Delta_i + A_i^2\cos 2\Delta_i + o(A_i^2), \quad i = 1, 2.$$

Учитывая это соотношение, по известной методике [3] находим совместую плотность вероятности $W_4(E_1, E_2, A_1, A_2, \Delta_1, \Delta_2)$:

$$W_4(E_1, E_2, A_1, A_2, \Delta_1, \Delta_2) = \\ = |D| \left[W_{2e}(E_1, E_2) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial W_{2e}(E_1, E_2)}{\partial E_i}\varepsilon_i + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 W_{2e}(E_1, E_2)}{\partial E_i \partial E_j}\varepsilon_i\varepsilon_j \right],$$

где $D = \frac{\partial(e_1, e_2)}{\partial(E_1, E_2)}$ — якобиан преобразования, $W_{2e}(e_1, e_2)$ — совместная плотность вероятности случайных процессов $e_1(t)$ и $e_2(t)$ в совпадающие моменты времени.

При дальнейшем анализе начальные фазы гравитационных импульсов в отдельных модах будем считать (учитывая особенности конструкции системы регистрации) статистически независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на интервале $(0, 2\pi)$. Тогда $\langle\varepsilon_i\rangle_\Delta = 0$, $\langle\varepsilon_i\varepsilon_j\rangle_\Delta = 0$ при $i \neq j$ и $\langle\varepsilon_i\varepsilon_j\rangle_\Delta = 2A_i^2 E_i$ при $i = j$, $i, j = 1, 2$. Следовательно, при обнаружении слабых гравитационных импульсов

$$W_{2E}(\cdot) \approx W_{2e}(E_1, E_2) + \\ + A^2 \sum_{i=1}^{2} c_i \frac{\partial}{\partial E_i}\left[E_i \frac{\partial W_{2e}(E_1, E_2)}{\partial E_i}\right], \tag{2}$$

где $c_1 = \mu^2$ и $c_2 = 1$.

3. Пусть

$$y(t) = f[E_1(t), E_2(t)] \approx \lambda s(t) + n(t)$$

— случайный процесс на выходе двухканального безынерционного нелинейного преобразователя, представляющий собой суперпозицию слабого полезного сигнала $s(t)$ и аддитивной негауссовой помехи $n(t)$, $M_1\{\ldots\}$ — символическая форма записи оператора статистического усреднения. Тогда, предполагая [1], что $M_1\{y(t)|\lambda = 0\} = 0$, имеем

$$\sigma^2 = M_1\{n^2(t)\} = \int_0^\infty\int_0^\infty f^2[E_1, E_2][W_{2E}(\cdot)]_0 dE_1 dE_2,$$

$$s(t) = M_1\{y(t)|\lambda = 1\} \approx \\ \approx A^2 \int_0^\infty\int_0^\infty f[E_1, E_2] dE_1 dE_2 \left[\frac{\partial W_{2E}(\cdot)}{\partial A^2}\right]_0,$$

где $[\ldots]_0 = [\ldots]_{A=0}$.

Как следует из анализа этого выражения, отношение сигнал–шум $q = |s(t)|/\sigma$ на выходе двухканального безынерционного нелинейного преобразователя зависит от вида его характеристики и достигает максимума при

$$f_2[E_1, E_2] = K_0 \frac{1}{[W_{2E}(\cdot)]_0}\left[\frac{\partial W_{2E}(\cdot)}{\partial A^2}\right]_0,$$

где K_0 — произвольный масштабный коэффициент. Отсюда, принимая во внимание выражение (2), находим окончательное выражение для оптимальной по критерию максимума отношения сигнал–шум характеристики безынерционного нелинейного преобразователя при совместной обработке реализаций случайных процессов $E_1(t)$ и $E_2(t)$:

$$f[E_1, E_2] = K_0 \frac{1}{W_{2e}(E_1, E_2)} \times \\ \times \sum_{i=1}^{2} c_i \frac{\partial}{\partial E_i}\left[E_i \frac{\partial W_{2e}(E_1, E_2)}{\partial E_i}\right]. \tag{3}$$

4. В теории оптимального приема [4] широкое применение получила параметрическая модель априорной неопределенности, основанная на бигауссовой аппроксимации плотности вероятности аддитивной негауссовой помехи. При бигауссовой аппроксимации распределения шума на выходе гравитационной антенны в двухмодовом режиме можем записать, что

$$W_{2n}(n_1, n_2) = \sum_{i=1}^{2} p_i \frac{1}{\sigma_{1i}}\frac{1}{\sigma_{2i}} W_{2\xi}\left(\frac{n_1}{\sigma_{1i}}, \frac{n_2}{\sigma_{2i}}, r_i\right),$$

где $W_{2n}(n_1, n_2)$ — совместная плотность вероятности аддитивных шумов $n_1(t)$ и $n_2(t)$ в совпадающие моменты времени, $-\infty < n_{1,2} < \infty$; $p_1 = (1 - p)$, $p_2 = p$, $0 \leqslant p \leqslant 1$, — вероятность появления аномалии в произвольный момент времени; $\sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2$ и $\sigma_{21}^2; \sigma_{22}^2$ — характерные параметры; $W_{2\xi}(\xi_1, \xi_2, r)$ — совместная плотность вероятности коррелированных гауссовых случайных величин ξ_1 и ξ_2 с единичными дисперсиями; $r = M_1\{\xi_1\xi_2\}$ — коэффициент корреляции (при основанной на применении метода рандомизации [3] аппроксимации плотности вероятности $W_{2n}(n_1, n_2)$ [2] предполагалось, что при некоррелированных шумах $n_1(t)$ и $n_2(t)$ выполняется соотношение $r_1 = r_2 = 0$).

При обнаружении слабых гравитационных импульсов для вычисления характерных параметров p, σ_{11}^2, σ_{12}^2 и σ_{21}^2, σ_{22}^2 можно применить известный алгоритм [4], использующий в качестве «входных данных» выборочные начальные моменты $M_1^*\{E_{1,2}^k\}$,

$k=1,2,3$, где

$$M_1^*\{\ldots\} = \frac{1}{T_0}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2}\{\ldots\}dt, \qquad (4)$$

$(-T_0/2,\ T_0/2)$ — «интервал стационарности» аддитивных помех на выходе линейного тракта гравитационной антенны. Подобную методику можно использовать и при вычислении коэффициентов корреляции r_1 и r_2, используя в качестве «входных данных» выборочные смешанные моменты

$$M_1^*\left\{n_1^k n_2^m\right\} \approx M_1^* \times \\ \times\left\{e_1^{k/2}(t)e_2^{m/2}(t)\cos^k[\omega_1 t+\vartheta(t)]\cos^m[\omega_2 t+\vartheta(t)]\right\},$$

$$M_1^*\left\{n_1^k n_2^m\right\} \approx M_1\left\{n_1^k n_2^m\right\} = \\ = \sum_{i=1}^{2} p_i\sigma_{1i}^k\sigma_{2i}^m M_1\left\{\xi_1^k\xi_2^m|i\right\}, \qquad (5)$$

$$M_1\left\{\xi_1^k\xi_2^m|i\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi_1^k\xi_2^m W_{2\xi}(\xi_1,\xi_2,r_i)\,d\xi_1 d\xi_2.$$

Из (1), (4) и (5) находим ковариацию аномально-засоренных аддитивных помех $n_1(t)$ и $n_2(t)$ в совпадающие моменты времени при $k=m=1$ и $r_{1,2}\neq 0$:

$$M_1\{n_1n_2\} = \sum_{i=1}^{2} p_i\sigma_{1i}\sigma_{2i}r_i \approx 0, \\ \text{т. е. } r_2 \approx r_1\frac{(p_1\sigma_{11}\sigma_{21})}{(p_2\sigma_{12}\sigma_{22})}. \qquad (6)$$

При вычислении смешанного момента $M_1\{n_1^2n_2^2\}$ четвертого порядка воспользуемся следующим соотношением [3]:

$$M_1\{\xi_1^2\xi_2^2|i\} = M_1\{\xi_1\xi_1\xi_2\xi_2|i\} = (1+2r_i^2),\quad i=1,2.$$

Подставляя это выражение в основную формулу (5) и учитывая условие (1), получим

$$M_1\left\{n_1^2n_2^2\right\} = \sum_{i=1}^{2} p_i\sigma_{1i}^2\sigma_{2i}^2(1+2r_i^2) \approx \\ \approx \frac{1}{4}M_1^*\{e_1e_2\} \approx \frac{1}{4}M_1\{e_1e_2\}. \qquad (7)$$

Из (6) и (7) находим неизвестные параметры r_1 и r_2 при некоррелированных аномально-засоренных шумах в отдельных модах:

$$r_1^2 = \frac{p_2}{2p_1(\sigma_{11}\sigma_{21})^2} \times \\ \times\left[\frac{1}{4}M_1^*\{e_1e_2\} - \left(p_1\sigma_{11}^2\sigma_{21}^2 + p_2\sigma_{12}^2\sigma_{22}^2\right)\right], \qquad (8) \\ r_2^2 = r_1^2\left(\frac{p_1\sigma_{11}\sigma_{21}}{p_2\sigma_{12}\sigma_{22}}\right)^2.$$

5. Двумерная плотность вероятности квадрата $\rho(t)$ огибающей узкополосного гауссова шума с единичной дисперсией определяется следующим выражением [3]:

$$W_{2\rho}(\rho_1,\rho_2,r_0) = \\ = \frac{1}{4(1-r_0^2)}\exp\left\{-\frac{\rho_1+\rho_2}{2(1-r_0^2)}\right\}I_0\left(\frac{r_0\sqrt{\rho_1\rho_2}}{1-r_0^2}\right) = \\ = \frac{1}{4}\exp\left\{-\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\right\}\sum_{k=0}^{\infty} r_0^{2k}L_k^{(0)}\left(\frac{\rho_1}{2}\right)L_k^{(0)}\left(\frac{\rho_2}{2}\right), \qquad (9) \\ \rho_{1,2}\geqslant 0,$$

где $\rho_1=\rho(t)$, $\rho_2=\rho(t+\tau)$, $r_0=r_0(\tau)$ — огибающая коэффициента корреляции,

$$M_1\{\rho_1\rho_2\} = 4(1+r_0^2),\quad r_0\geqslant 0, \qquad (10)$$

$I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя 0-го порядка, $L_k^{(\alpha)}(z)$ — ортогональные полиномы Лагерра,

$$kL_k^{(\alpha)}(z) = (-z+2k+\alpha-1)L_{k-1}^{(\alpha)}(z) - \\ -(k+\alpha-1)L_{k-2}^{(\alpha)}(x), \qquad k\geqslant 2, \\ L_0^{(\alpha)}(x)=1,\quad L_1^{(\alpha)}(x)=1+\alpha-x.$$

Учитывая выражение (9), находим плотность вероятности $W_{2e}(E_1,E_2)$ при аномально-засоренных шумах на выходе линейного тракта гравитационной антенны:

$$W_{2e}(e_1,e_2) = \sum_{i=1}^{2} p_i\left(\frac{1}{\sigma_{1i}\sigma_{2i}}\right)^2 W_{2\rho}\left(\frac{E_1}{\sigma_{1i}^2},\frac{E_2}{\sigma_{2i}^2},r_{0i}\right), \\ E_{1,2}\geqslant 0. \qquad (11)$$

При $r_{01}=r_{02}=0$ плотность вероятности (11) переходит в биэкспоненциальную плотность вероятности, которая была использована в работе [2].

Из (9) и (11) следует, что ковариация случайных процессов $e_1(t)$ и $e_2(t)$ в совпадающие моменты времени при бигауссовой аппроксимации имеет вид

$$M_1\{e_1,e_2\} = 4\sum_{i=1}^{2} p_i\sigma_{1i}^2\sigma_{2i}^2\left(1+2r_{0i}^2\right).$$

Отсюда, принимая во внимание выражения (10) и (11), получим следующее соотношение для вычисления параметров r_{01}^2, r_{02}^2:

$$r_{0i}^2 = 2r_i^2 \neq 0 \ \text{ при } \ p\neq 0,1,\quad i=1,2.$$

Основные результаты и выводы

1. Оптимальная по критерию максимума отношения сигнал–шум характеристика двухканального безынерционного нелинейного преобразователя при амплитудно-частотном обнаружении некогерентной последовательности слабых и редких гравитационных импульсов на выходе гравитационной антенны в двухмодовом режиме определяется выражением (3).

Плотность вероятности $W_2(E_1, E_2)$, от которой зависит вид характеристики, при аномально-засоренных шумах с бигауссовой плотностью вероятности дается формулой (4).

2. Ковариация случайных процессов $e_1(t)$ и $e_2(t)$ в совпадающие моменты времени при биэкспоненциальной плотности вероятности ($r_1 = r_2 = 0$) определяется следующей формулой:

$$M_1\{e_1e_2\} - M_1\{e_1\}M_1\{e_2\} = \\ = 4p(1-p)\left(\sigma_{22}^2 - \sigma_{21}^2\right)\left(\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}^2\right).$$

При наличии хаотических импульсных помех $p \neq 0$, $\sigma_{i2}^2 \gg \sigma_{i1}^2$, $i = 1, 2$ и, следовательно, $M_1\{e_1e_2\} \neq M_1\{e_1\}M_1\{e_2\}$. Таким образом, даже простейшая параметрическая модель априорной неопределенности [2] учитывает корреляцию случайных процессов $e_1(t)$ и $e_2(t)$ при некоррелированных шумах $n_1(t)$ и $n_2(t)$ в отдельных модах.

3. При расчете параметров плотности вероятности (11) используется ковариация (смешанный момент второго порядка) $M_1^*\{E_1, E_2\}$. Условие $r_1 = r_2 = 0$ обеспечивает некоррелированность аддитивных помех в отдельных модах, но при наличии негауссовых шумов ($p \neq 0, 1$) не учитывает ковариацию реальных процессов $e_1(t)$ и $e_2(t)$. Более того, можно показать [5], что полигауссова аппроксимация двумерной плотности вероятности при одинаковых коэффициентах корреляции ($r_i = r$, $i = \overline{1, M}$, $M = 2, 3, \ldots$) приводит к периодически-нестационарному случайному процессу. Следовательно, применение условия $r_1 = r_2 = 0$ при описании реальных шумов гравитационной антенны в двухмодовом режиме оказывается неоправданным.

4. Коэффициент корреляции огибающих произвольных гауссовых узкополосных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ в совпадающие моменты времени зависит [6] от фактора

$$\rho_0 = \sqrt{r^2 + r_+^2},$$

где r — коэффициент корреляции случайных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ в совпадающие моменты времени, r_+ — коэффициент взаимной корреляции случайных процессов $\xi_1^*(t)$ и $\xi_2^*(t)$, взятых в квадратуре по отношению к шумам $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Для гравитационной антенны с трансформатором смещения в двухмодовом режиме $r_+ = r$ (следствие условия (1)).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-02-17884).

Литература

1. *Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А.* и др. Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984.
2. *Гусев А.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 6. С. 48.
3. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
4. *Шелухин О.И.* Негауссовские процессы в радиотехнике. М.: Радио и связь, 1999.
5. *Чабдаров Ш.М., Трофимов А.Т.* // Радиотехн. и электроника. 1975. **20**, № 4. С. 734.
6. *Горяинов В.Т., Журавлев В.И., Тихонов В.И.* Примеры и задачи по статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1970.

Поступила в редакцию
21.01.02