Как и в случае обычных ленточных графов, числа точек и ребер на границе поверхности сокращают друг друга, поэтому их в формулах не пишем.

Обозначим через χ_{m_k} эйлерову характеристику сферы с m_k отверстиями. Поскольку $\chi_{m_k} = 2 - m_k$, имеем

$$I - P + \sum_{k=1}^{V} \chi_{m_k} = \chi. \tag{3}$$

Найдем $1/N$ разложение для обобщенных ленточных графов. Рассмотрим обобщенный ленточный граф G. Обозначим через $g_r^{(m)}$ константу взаимодействия, соответствующую вершине с r ребрами, разбитыми на m групп.

Теорема 2. *Пусть* $g_r^{(m)} \sim N^{\chi_m - r/2}$. *Тогда фейнмановский интеграл зависит от* N

$$X_G \sim N^{\chi - \frac{R}{2}}.$$

Используя (2) и (3), запишем систему

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{v \in G} \frac{r}{2} = P + \frac{R}{2}, \\ \displaystyle I - P + \sum_{v \in G} \chi_m = \chi. \end{cases}$$

Здесь суммы идут по всем вершинам G. Выражая P, находим

$$I + \sum_{v \in G} (\chi_m - \frac{r}{2}) = \chi - \frac{R}{2}.$$

Если $g_r^{(m)} \sim N^{\chi_m - r/2}$, то

$$X_G = N^I \cdot \prod_{v \in G} g_r^{(m)} \sim N^{\chi - R/2}.$$

Автор благодарен В.В. Белокурову за ценные замечания и внимание к работе. Работа выполнена при частичной поддержке гранта INTAS 00-334, гранта РФФИ № 01-02-17488 и гранта Президента РФ № 00-15-99296.

Литература

1. *t'Hooft G.* // Nucl. Phys. B. 1974. **72**. P. 461.
2. *Maldacena J.M.* // Adv. Theor. Math. Phys. 1998. **2**. P. 231.
3. *Gubser S.S., Klebanov I.R., Polyakov A.M.* // Phys. Lett. B. 1998. **428**. P. 105.
4. *Witten E.* // Adv. Theor. Math. Phys. 1998. **2**. P. 253.
5. *Berenstein D., Maldacena J., Nastase H.* // JHEP. 2002. 04. 013.
6. *Aharony O., Gubser S.S., Maldacena J., Ooguri H., Oz Y.* // Phys. Reports. 2000. **323**. P. 183.
7. *Aref'eva I.Ya., Belov D.M., Koshelev A.S.* // Phys. Lett. B. 2000. **476**. P. 431.
8. *Aref'eva I.Ya., Zubarev A.P.* // Phys. Lett. B. 1996. **386**. P. 258.
9. *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
10. *Malyshev D.V.* // JHEP. 2002. 05. 013.
11. *Witten E.* // hep-th/0112258.
12. *Klebanov I.R., Witten E.* // Nucl. Phys. B. 1999. **556**. P. 89.
13. *Aharony O., Berkooz M., Silverstein E.* // JHEP. 2001. 08. 006.
14. *Berkooz M., Sever A., Shomer A.* // JHEP. 2002. 05. 034.

Поступила в редакцию
29.05.02

УДК 517.958; 621.372.8

ЗАМЕЧАНИЕ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

М. Д. Малы

(*кафедра математики*)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Рассмотрены погруженные в непрерывный спектр собственные значения спектральных задач для волновода с заполнением. Найден пример возмущения заполнения волновода, при котором исчезают погруженные в непрерывный спектр собственные значения спектральной задачи для волновода с заполнением.

В работах [1–2] показано, что вложенные в непрерывный спектр собственные значения спектральной задачи неустойчивы к малым возмущениям заполнения волновода.

Пусть необходимо решить задачу на собственные значения в плоском волноводе $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1, y \in [0, +\pi]\}$: найти число e и функцию $u \not\equiv 0$, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \Delta u + \mathrm{e} q(x,y) u = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega), \end{cases} \tag{1}$$

где $q(x,y)$ — заданная кусочно-непрерывная функция, характеризующая заполнение волновода, а $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ — соответствующее пространство Соболева.

Будем считать, что волновод заполнен локально нерегулярно, причем

$$\mathrm{Supp}[q(x,y)-1]\subset\Omega'=\{x\in[-1,1],\ y\in[0,+\pi]\},$$

и в нем отсутствует затухание, т. е. функция $q(x,y)$ — вещественная.

Заметим, что собственные значения оператора Лапласа задачи Дирихле α_n^2 на сечении Ω равны n^2, где $n=1,2,\ldots$, а соответствующие им собственные функции $\psi_n(y)$ равны $\sin ny$. Поэтому нижняя граница непрерывного спектра задачи (1) есть $\alpha_1^2=1$.

Возьмем в качестве невозмущенного заполнение типа простой вставки:

$$q_0(x)=\begin{cases}q_0, & x\in(-1,+1)\\ 1, & \text{иначе.}\end{cases}$$

В статье [3] показано, что при достаточно малых положительных q_0-1 существует вложенное собственное значение $e_0>\alpha_1^2$ задачи (1) с $q(x,y)=q_0(x)$, которому отвечает собственная функция, имеющая на отрезке $(-1,+1)$ вид

$$u_0(x,y)=u_2(x)\sin 2y,$$

где $u_2(x)=\cos\gamma' x$, а $\gamma'=\sqrt{\alpha_2^2-e_0q_0}$. Вложенное в непрерывный спектр собственное значение волновода сохраняется не при всех возможных вещественных возмущениях

$$q(x,y)=q_0(x)+\varepsilon q_1(x,y),$$

где q_1 — вещественная функция, ε характеризует малость возмущения лишь при тех возмущениях, при которых задача

$$\frac{d^2w}{dx^2}+[e_0q_0(x)-\alpha_1^2]w=e_0u_2(x)\int\limits_0^{\pi}q_1(x,y)\psi_1(y)\psi_2(y)\,dy \tag{2}$$

имеет решение w из $L^2(\mathbb{R}^1)$ (см. [1–2]).

Предположим, что при данном q_1 такое w существует, и найдем соотношения, которым должно удовлетворять q_1. Вне отрезка $(-1,+1)$ функция $w(x)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{d^2w}{dx^2}+[e_0-\alpha_1^2]w=0,$$

и, следовательно, имеет вид

$$w=C_1\sin\left(\sqrt{e_0-\alpha_1^2}x\right)+C_2\cos\left(\sqrt{e_0-\alpha_1^2}x\right).$$

Поэтому $w\equiv 0$ при $x\notin[-1,1]$. Поскольку обобщенное решение (2) непрерывно дифференцируемо, то для w имеем переопределенную задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2w}{dx^2}+\gamma^2w=f(x),\\ w|_{x=\pm1}=\left.\dfrac{dw}{dx}\right|_{x=\pm1}=0,\end{cases} \tag{3}$$

где $\gamma^2=e_0q_0-\alpha_1^2$ — данное число, а правая часть уравнения (3)

$$f(x)=e_0u_2(x)\int\limits_S q_1(x,y)\psi_1(y)\psi_2(y)\,dy.$$

Задача

$$\begin{cases}\dfrac{d^2w}{dx^2}+\gamma^2w=f(x),\\ w|_{x=\pm1}=0\end{cases}$$

разрешима однозначно. В самом деле, положим

$$v_1=\sin(\gamma(x-1)),\quad v_2=\sin(\gamma(x+1)),$$

тогда

$$wW[v_1,v_2]=$$
$$=v_1(x)\int\limits_{-1}^{x}v_2(y)f(y)\,dy+v_2(x)\int\limits_{x}^{1}v_1(y)f(y)\,dy,$$

где $W[v_1,v_2]=\mathrm{const}$ — определитель Вронского. Для того чтобы w удовлетворяло (3), необходимо выполнение еще двух условий:

$$w'|_{x=1}=v_1'(1)\int\limits_{-1}^{1}v_2(y)f(y)\,dy=0$$

и

$$w'|_{x=-1}=v_2'(-1)\int\limits_{-1}^{1}v_1(y)f(y)\,dy=0.$$

Поскольку $v_1'(1)=\gamma\neq0$ и $v_2'(-1)=\gamma\neq0$, функция f, при которой существует решение задачи (3), должна удовлетворять условиям

$$\int\limits_{-1}^{1}\sin\gamma(x\pm1)f(x)\,dx=0. \tag{4}$$

Найдем функцию q_1, не удовлетворяющую этим условиям. Для этого возьмем

$$q_1(x,y)=\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}Q(x)$$

в Ω', где $Q(x)$ — неопределенная кусочно-непрерывная функция. В этом случае $q_1(x,y)$ — ограниченная, кусочно-непрерывная функция в области Ω и на ее границе. При такой функции q_1 функция f имеет вид

$$f=e_0u_2(x)Q(x).$$

Поскольку $u_2(x)=\cos\gamma' x$, из (4) получим:

$$\int\limits_{-1}^{1}\sin\gamma(x\pm1)\cos\gamma' xQ(x)\,dx=0.$$

При

$$Q(x)=\sin\gamma(x\pm1)\cos\gamma' x$$

одно их этих равенств не выполняется. Итак, возмущение вида

$$q_1(x,y)=\frac{\psi_2}{\psi_1}\sin\gamma(x\pm1)\cos\gamma' x$$

приводит к исчезновению рассматриваемого собственного значения.

Доказанное позволяет проиллюстрировать неустойчивость вложенных собственных значений к малым вещественным возмущениям заполнения.

В заключении выражаю искренную благодарность проф. А.Н. Боголюбову и А.Г. Свешникову за постановку задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 02-01-00271, 00-01-00111) и программы «Университеты России» (грант УР.02.03.010).

Литература

1. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г.* // Докл. РАН. 2002. **385**, № 6. С. 744.
2. *Малых М.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2002. № 1. С. 61 (Moscow University Phys. Bull. 2002. No. 1. P. 69).
3. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 5. С. 23 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 5. P. 29).

Поступила в редакцию
10.04.02

УДК 536.75

О МЕТОДЕ СОКРАЩЕННОГО ОПИСАНИЯ В КВАНТОВОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ

П. Н. Николаев

(*кафедра квантовой статистики и теории поля*)

E-mail: nikolaev@qs.phys.msu.su

Получены выражения для термодинамических функций через простейшие статистические операторы. Решена проблема термодинамической совместимости термического и калорического уравнений состояния для квантовых систем.

До настоящего времени одним из наиболее эффективных методов изучения систем многих частиц является метод сокращенного описания, который в классической статистической физике обычно называют методом функций распределения, а в квантовой статистике — методом статистических операторов комплексов частиц [1].

Для системы N частиц, находящихся в объеме V и взаимодействующих посредством центральных сил, характеризуемых парным потенциалом $\Phi(|q_1-q_2|)$, калорическое уравнение состояния выражается через одночастичный и двухчастичный операторы

$$U=\operatorname*{Tr}_{1}T(1)R_1(1)+\frac{1}{2}\operatorname*{Tr}_{1,2}\Phi(|q_1-q_2|)R_2(1,2). \tag{1}$$

Здесь U — внутренняя энергия, $R_s(1,2,\dots,s)$ — s-частичный оператор

$$R_s(1,2,\dots,s)=\\ =\frac{N\dots(N-s+1)\operatorname*{Tr}_{s+1,\dots,N}\exp(-H(1,2,\dots,N)/\theta)}{\operatorname*{Tr}_{1,\dots,N}\exp(-H(1,2,\dots,N)/\theta)}, \tag{2}$$

где q_i — вектор, определяющий положение i-й молекулы $(i=1,\dots,N)$ и имеющий компоненты $q_i^\alpha\ (\alpha=1,2,3)$,

$$H(1,2,\dots,N)=\sum_{i=1}^{N}T(i)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\Phi(|q_i-q_j|) \tag{3}$$

— гамильтониан системы,

$$T(i)=\sum_{\alpha=1}^{3}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q_i^{\alpha 2}}$$

— оператор кинетической энергии i-й частицы, $\theta=kT$ (k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура).

Для определения термического уравнения состояния воспользуемся λ-преобразованием: при пропорциональном расширении линейных размеров области

$$p=\frac{\theta}{3VZ}\left\{\frac{\partial Z(\lambda)}{\partial\lambda}\right\}_{\lambda=1},$$

где $Z(\lambda)$ обозначает статистическую сумму, соответствующую изменению линейных размеров в λ раз

$$Z(\lambda)=\operatorname*{Tr}_{1,\dots,N}\exp\left(-\left(\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{N}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q_i^{\alpha 2}}+\right.\right.\\ \left.\left.+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\Phi(\lambda|q_i-q_j|)\right)\Big/\theta\right).$$