

## ПРИГЛАШЕННЫЙ ОБЗОР

УДК 519.246.8

## ПРОБЛЕМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

### III. ЛОКАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

А. Ю. Лоскутов, О. Л. Котляров, И. А. Истомина, Д. И. Журавлев

(кафедра полимеров и кристаллов)

E-mail: loskutov@moldyn.phys.msu.ru

В работе\*) рассмотрены некоторые методы, применяемые для прогноза временных рядов. Основное внимание уделено локальным методам, разработанным в рамках нелинейной динамики. Построена общая математико-статистическая модель локальной аппроксимации. Она позволяет единым образом описать большинство вариантов и методов, основанных на принципе локальной аппроксимации, а также некоторые другие родственные методы. В рамках модели удается получить аналитический вид решения задачи прогноза и в некоторых случаях заранее оценить возможную ошибку прогноза и асимптотические свойства решения. Становится возможным обоснованный выбор варианта метода локальной аппроксимации в зависимости от условий конкретной задачи и характера исходных данных.

#### Содержание

Введение .....	3
<b>1. Методы прогноза нерегулярных временных рядов и их применение</b> .....	<b>4</b>
1.1. Глобальные методы .....	4
1.2. Локальные методы .....	6
<b>2. Общий алгоритм локальной аппроксимации</b> .....	<b>7</b>
2.1. Построение прогноза на один шаг вперед .....	7
2.2. Порядок аппроксимации .....	9
2.3. Прогноз на несколько шагов вперед .....	10
<b>3. Общая математико-статистическая модель метода локальной аппроксимации</b> ..	<b>12</b>
3.1. Построение системы уравнений LA .....	12
3.2. Аналитический вид решения задачи прогноза методом LA .....	13
<b>4. Выбор оптимального варианта LA при прогнозировании на несколько шагов вперед на основе математико-статистической модели</b> .....	<b>14</b>
4.1. Способы решения задачи прогноза на несколько шагов вперед .....	14
4.2. Величина ошибки прогноза: предпосылки выбора порядка аппроксимации и способа прогнозирования .....	16
4.3. Результаты численного сравнения .....	19
<b>Заключение</b> .....	<b>20</b>
<b>Литература</b> .....	<b>21</b>

#### Введение

Начиная с работ Хакена [1] и Пригожина [2], в которых было показано, что в большом классе систем могут возникать резкие переходы, гистерезис, пространственно-временные структуры и детерминированный хаос, и до сегодняшнего дня интерес к нелинейным явлениям постоянно растет. Он обусловлен широким распространением нелинейных явлений, которые наблюдаются практически во всех областях науки.

Как показали теоретические и эксперименталь-

ные исследования, несмотря на то, что нелинейные системы могут значительно отличаться в конкретных проявлениях и деталях описания, существуют аналогии в их организации и функционировании. С одной стороны, такой вывод предопределил интерес исследователей к нелинейным динамическим системам и попыткам их единого описания. С другой стороны, целый ряд идей и методов, разработанных изначально в теории хаоса и нелинейной динамики, стали общезначимыми, выйдя далеко за рамки достаточно специализированных дисциплин. На се-

\*) Данная работа является продолжением цикла «Проблемы нелинейной динамики». Части I и II были опубликованы в журнале «Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.» (2001. № 2. С. 3; № 3. С. 3).

годняшний день методы синергетики и нелинейной динамики успешно применяются во многих областях исследований, связанных с изучением различных процессов [3–6].

Наиболее явно связь между теорией хаоса и реальным миром проявляется при анализе временных рядов на основе подходов нелинейной динамики. Примеры хаотического поведения были обнаружены во многих областях науки, включая биологию, физиологию, медицину, гео- и астрофизику, а также в социальных науках и финансах. Поэтому именно в этих областях в первую очередь нашли свое применение методы прогноза временных рядов, разработанные в рамках нелинейной динамики. Они имеют ряд преимуществ перед стандартными алгоритмами прогноза при исследовании квазипериодических и хаотических систем. Нелинейная динамика не может решить все проблемы анализа временных рядов, но на ее основе был разработан новый набор алгоритмов и методов исследования временных рядов и создан новый язык, позволяющий формулировать задачи анализа и прогноза временных рядов и методы их решения.

В настоящей статье рассмотрено несколько примеров использования методов нелинейной динамики для прогноза временных рядов различной природы. Особое внимание уделяется локальным методам: подробно описаны алгоритмы, дана классификация и построена общая математико-статистическая модель методов локальной аппроксимации, объединяющая все основные варианты и модификации.

## 1. Методы прогноза нерегулярных временных рядов и их применение

Определим круг рассматриваемых методов. Анализ результатов любого эксперимента начинается с обработки полученных данных. Во многих случаях эти данные представляют собой временные ряды — расположенные в хронологической последовательности значения одной или нескольких измеряемых величин. Способ обработки зависит от наличия модели исследуемой системы либо представлений о поведении измеряемых величин. Если такая модель существует, то обработка ряда сводится либо к качественной проверке соответствия наблюдаемого поведения предсказанию модели, либо к оценке параметров этой модели по данным эксперимента. Соответственно и прогноз изменения регистрируемой величины может делаться на основании имеющейся модели.

Совершенно иная ситуация возникает, если отсутствует адекватная модель поведения наблюдаемой величины или ее невозможно построить. В этом случае для прогноза динамики наблюдаемой величины требуются специальные методы. Некоторые из них будут рассмотрены далее.

Наличие большого числа систем, для которых пока отсутствуют адекватные модели, но в то же время

необходимо прогнозировать изменения параметров (в первую очередь это относится к области финансов), привело к разработке разнообразных методов экстраполяции. Настоящая статья не претендует на полноту изложения их алгоритмов и даже перечисление самих методов. Внимание прежде всего уделено методам, разработанным в рамках нелинейной динамики с акцентом на локальные методы.

Первыми были разработаны глобальные методы, поэтому рассмотрение начнем именно с них.

### 1.1. Глобальные методы

Деление методов на глобальные и локальные проводится по области определения параметров аппроксимирующей функции [7]. В глобальных методах эти параметры идентифицируются с использованием всех известных значений ряда. Основное направление использования глобальных методов — это получение глобальных характеристик системы. Прогнозирование в этих методах если и используется, то как полезная, дополнительная, но далеко не самая главная возможность.

#### 1.1.1. Авторегрессия

Методы, основанные на авторегрессионных моделях, уже достаточно давно применяются в статистике, экономике и метеорологии [4]. Их основная идея — выражение следующих значений ряда через предыдущие. Вероятно, это практически единственный способ, который можно использовать в ситуации, когда никакой другой информации о системе, кроме заключенной в предыдущих значениях ряда, нет.

#### Идентификация

Линейная модель авторегрессии порядка  $p$  имеет вид:

$$x_{t+1} = a_1 x_t + a_2 x_{t-1} + \dots + a_p x_{t-p+1} + \xi_{t+1}, \quad \forall t, \quad (1)$$

где  $a_1, \dots, a_p$  — некоторые постоянные коэффициенты, т. е. параметры модели,  $\{\xi_t\}$  — последовательность случайных величин, образующая белый шум,  $x_t$  — значение ряда на шаге  $t$ . Модель авторегрессии порядка  $p$  относится к классу линейных параметрических моделей.

Идентификация модели включает в себя статистическое оценивание ее параметров, основанное на решении системы линейных уравнений Юла–Уокера [8], связывающих между собой неизвестные параметры модели и автокорреляции анализируемого ряда. При этом оценки параметров получаются глобальными, т. е. едиными для всего ряда. Однако прежде чем оценить сами параметры в рамках идентификации модели, нужно определить количество этих параметров, т. е. выбрать порядок авторегрессии. Обычно выбор осуществляется по виду частной автокорреляционной функции [9].



компонент состоит в снижении размерности исходного пространства факторов (у нас это пространство задержек) посредством перехода к более «информативным» переменным (координатам). Полученные таким образом новые переменные и называют главными компонентами. Этот переход осуществляется с помощью ортогонального линейного преобразования.

Главные компоненты обладают многими важными свойствами. В SSA получающееся разложение используется для выделения наиболее значимых составляющих ряда и отсева случайных возмущений. Применение этого метода позволяет сгладить исходный ряд, снизить уровень случайных возмущений, повысить отношение сигнал/шум.

### Прогнозирование

Реализация возможности прогнозирования на базе SSA осуществляется двумя основными способами. Первый имеет собственное название «Гусеница» [18] и использует специфические особенности SSA-разложения. Второй [15] предусматривает использование для прогнозирования метода авторегрессии, применяемого по отдельности к каждой из выбранных компонент разложения.

### Примеры

Рассмотрим два примера, в которых метод SSA-«Гусеница» применялся для прогнозирования временных рядов.

Первый пример взят из работы [21] и демонстрирует возможности метода для прогноза временного ряда отношения товарных запасов к продажам товаров длительного пользования в США ( $\Delta$ ). Для построения использовались ежемесячные данные за период с января 1981 г. по февраль 2000 г. включительно. Прогноз строился на период с марта 2000 г. до февраля 2002 г. и затем сравнивался с фактическими данными (только до февраля 2001 г.). Результат прогноза иллюстрирует рис. 1. Точками показаны фактические значения отношения, сплошной линией — результат реконструкции и штриховой — прогноз. Видно, что все двенадцать прогнозных значений оказались достаточно точными,

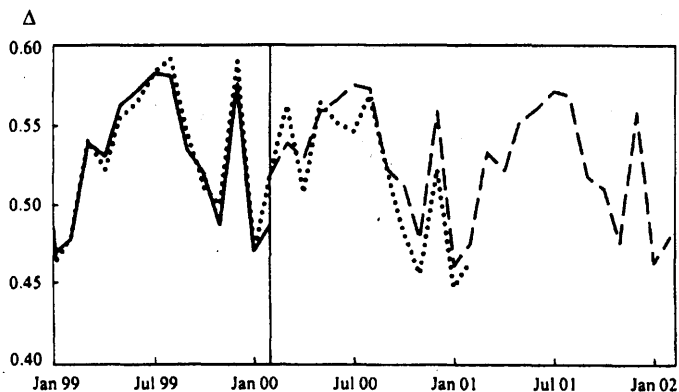


Рис. 1. Фактическая динамика, реконструкция и прогноз отношения товарных запасов к продажам товаров длительного пользования в США ( $\Delta$ ) [21]

остальные на момент написания работы [21] сопоставить с фактическими данными было невозможно ввиду отсутствия последних.

Второй пример связан с прогнозированием солнечной активности, характеризуемой величиной чисел Вольфа [16]. Прогноз на 18 лет, т. е. примерно на полтора 11-летних солнечных цикла оказался весьма точным (см. рис. 2). Он был выполнен по тому же принципу, что и в предшествующем примере, т. е. последние 216 значений ряда (12 месяцев  $\times$  18 лет), на рисунке они отделены вертикальной линией, не учитывались при реконструкции ряда и построении прогноза, а использовались только для оценки точности прогноза.



Рис. 2. Прогноз по методу SSA-«Гусеница» и реальные значения чисел Вольфа, характеризующих солнечную активность. Сплошная линия слева от вертикальной черты — реконструкция, справа — прогноз [16]

### 1.2. Локальные методы

Локальные методы прогноза, основанные на принципе локальной аппроксимации (ЛА), имеют преимущество перед остальными методами исследования и прогноза временных рядов в задачах, связанных с прогнозированием нерегулярных (хаотических, квазипериодических) рядов [4, 16]. Принцип ЛА предложен впервые в работе [22]. Его применение не требует априорной информации о системе, породившей временной ряд, и нет необходимости в построении специфической модели динамики исследуемого ряда. При этом возможность использования ЛА для прогнозирования нерегулярных временных рядов определяется базовым принципом, лежащим в его основе, т. е. локальностью строящейся аппроксимации. Этот принцип подразумевает отказ от явного использования для прогнозирования всех (уже известных) значений ряда и ограничивает количество объясняющих значений лишь наиболее близкими в некотором смысле к стартовой точке, после которой начинается прогноз. Под стартовой точкой (стартовым вектором) понимается последнее или несколько последних известных значений ряда.

Применение локальной аппроксимации позволяет избежать главной проблемы, возникающей при прогнозировании нерегулярных временных рядов существующими глобальными методами (см., напр., [5, 23, 24]). Эта проблема связана с трудностями адекватного описания динамики квазипериодических и хаотических временных рядов на основе глобальной линейной модели (1). Введение в указанную модель нелинейных членов требует резкого увеличения количества исходных данных для того, чтобы получить устойчивые оценки коэффициентов. В свою очередь увеличение количества данных означает увеличение длины интервала, на котором применяется модель. А чем длиннее интервал, тем больше параметров должно содержаться в модели, чтобы обеспечить ее адекватность на всем интервале (последнее в первую очередь характерно для работы с экономическими данными).

Применение локальной аппроксимации позволяет избежать цепного усложнения модели, поскольку она предполагает использование вместо глобально-линейной аппроксимации кусочно-линейного приближения. При этом вид уравнения модели остается, как правило, линейным типа (1), но его параметры полагаются неизменными лишь в ближайшей окрестности стартового значения, причем близость определяется не во времени, а в пространстве задержек [19]. Последнее условие является результатом появления метода в рамках нелинейной динамики [1, 14, 25, 26]. Наиболее важный результат перехода от глобальной аппроксимации к локальной при прогнозировании достаточно длинных хаотических временных рядов состоит в том, что длина прогноза ограничивается в первую очередь не возможностями метода (как при глобальной аппроксимации), а лишь особенностями динамики ряда.

Принцип локальной аппроксимации лег в основу целого класса методов прогноза временных рядов (локальная аппроксимация применяется исключительно в целях прогнозирования динамики ряда, а анализ основных закономерностей осуществляется, как правило, другими методами, например SSA), различающихся способами построения прогноза и применяемыми моделями аппроксимации, но сохранившими общее название по объединяющему их базовому принципу. Классификация этих методов была предложена самими авторами принципа локальной аппроксимации [27], но до настоящего времени вопрос о выборе оптимального метода (варианта метода) решается, как правило, эмпирически [28].

В настоящей работе строится единая математическая модель, объединяющая все методы и варианты локальной аппроксимации и позволяющая выбрать наиболее оптимальный вариант с точки зрения использования данных, точности и устойчивости прогноза на основе анализа каждого из методов. Кроме того, разработка единого алгоритма расчета по любому из вариантов LA может помочь в поиске

способов повышения точности получаемых прогнозов (когда это возможно) и расширения области применения методов типа LA. Подробная классификация этих методов и их качественное сравнение дано во второй части работы. Там же изложена общая для всех вариантов базовая часть алгоритма LA. Третья часть посвящена построению единой математико-статистической модели LA. В четвертой части на основе этой модели представлен сравнительный анализ вариантов LA.

В завершение настоящего раздела рассмотрим один пример использования LA. Он взят из работы [29] и, как и предшествующий, связан с прогнозированием солнечной активности. В нем строится прогноз сглаженного ряда значений чисел Вольфа на период с октября 1998 г. по март 2003 г. на основе данных за период с июня 1749 г. по июнь 1999 г. На рис. 3 показан фрагмент сглаженного исходного ряда чисел Вольфа (с сентября 1986 г. по сентябрь 1998 г.) — темная линия, и результат прогноза — более светлая линия. По приведенному прогнозу максимальное число Вольфа в 23-м солнечном цикле ожидалось в апреле 2000 г. и должно было равняться 125.6. Фактически максимум (анализируется сглаженный ряд) был достигнут действительно в апреле 2000 г. и составил 120.8 [30], т. е. качество прогноза можно считать достаточно неплохим.

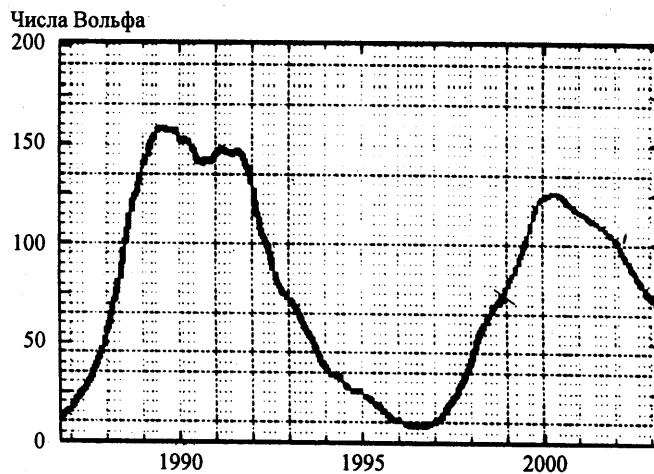


Рис. 3. Реальные значения и прогноз солнечной активности по методу LA

## 2. Общий алгоритм локальной аппроксимации

### 2.1. Построение прогноза на один шаг вперед

При описании алгоритма, реализующего LA (алгоритм LA), мы будем опираться на работу [27] как наиболее полное изложение этого метода и его основных вариантов. В этом разделе рассматривается первая и главная часть алгоритма LA, определяющая способ построения прогноза на один шаг по времени вперед. Прогнозам на большую длину посвящен раздел 2.3.

Прежде чем переходить к описанию самого алгоритма, остановимся подробнее на общих принципах анализа временных рядов в нелинейной динамике, а точнее — на принципе построения матрицы задержек.

### 2.1.1. Задача реконструкции фазового пространства. Метод задержек

Анализ временных рядов в нелинейной динамике основан на представлении любого ряда как хронологически упорядоченной последовательности значений некоторой *наблюдаемой* — скалярной функции состояния динамической системы. При этом главной задачей является реконструкция по временному ряду динамики породившей его системы [31, 32]. В соответствии с теорией Такенса–Мане [14, 26] приемлемое описание фазового пространства динамической системы можно получить, взяв вместо реальных переменных системы  $p$ -мерные векторы из значений ряда в последовательные моменты времени:  $\mathbf{x}_t = (x_t \ x_{t-1} \ \dots \ x_{t-p+1})^T$  — векторы задержек [33]. При выполнении условия  $p \geq 2d + 1$ , где  $d$  — размерность породившей ряд системы, возможно реконструировать фазовое пространство (пространство состояний) системы [14]. При условии стационарности временного ряда на базе этой реконструкции можно построить прогноз его дальнейшей динамики.

Главная проблема, возникающая при использовании многомерного представления временного ряда в виде матрицы задержек (набора векторов задержек), — это определение величины  $p$  [7, 34]. На сегодняшний день наиболее часто используемым алгоритмом для оценки величины  $p$  является алгоритм Грассбергера–Прокачия [35]. Однако и он оказывается неэффективным при работе с короткими (до  $10^4$  точек) временными рядами. Другие методы имеют свои недостатки: сложность реализации, большая длительность расчетов, неоднозначность либо сомнительность результатов [36]. В связи с этим величина  $p$ , за исключением модельных примеров, в которых она достоверно известна, как правило, определяется эмпирически. Главный критерий в этом случае — это выбор такого  $p$ , начиная с которого прекращается качественное изменение прогноза [37].

### 2.1.2. Первый шаг алгоритма ЛА. Построение матрицы задержек и выбор локального представления

Первым шагом как алгоритма ЛА, так и других методов анализа временных рядов, основанных на принципах нелинейной динамики, является метод задержек [17, 19]. В результате его применения скалярный временной ряд, содержащий  $N$  значений наблюдаемой, превращается в матрицу из векторов

задержек:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_N\} \rightarrow \mathbf{X}_{p \times (N-p+1)} = \begin{pmatrix} x_p & x_{p+1} & \dots & x_N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{N-p+2} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{N-p+1} \end{pmatrix}.$$

Размерность матрицы  $\mathbf{X}$  определяется количеством задержек  $p$ .

После построения матрицы задержек выбирается вид локального представления, т.е. вид функции, связывающей следующие значения ряда с предыдущими:

$$x_{t+1} = f(\mathbf{x}_t, \mathbf{a}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{a}$  — вектор параметров представления.

Наиболее распространенный вариант — линейная аппроксимация типа (1):

$$x_{t+1} = a_0 + \mathbf{x}_t^T \mathbf{a}, \quad (3)$$

используются еще два варианта:

$$x_{t+1} = a_0 \quad (4)$$

и

$$x_{t+1} = a_0 + \mathbf{x}_t^T \mathbf{a} + \mathbf{x}_t^T \mathbf{B} \mathbf{x}_t, \quad (5)$$

где  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1p} & b_{2p} & \dots & b_{pp} \end{pmatrix}$  — матрица дополнительных параметров представления.

Следуя авторам работы [27], модели (3)–(5) будем называть аппроксимацией первого, нулевого и второго порядков соответственно. Подробнее особенности каждого вида аппроксимации будут рассмотрены в разделе 2.2.

### 2.1.3. Второй шаг алгоритма ЛА. Выбор ближайших соседей — выделение локальной подобласти фазового пространства

Как уже отмечалось, основная идея ЛА состоит в прогнозировании не по всем исходным данным, а по «ближайшим» к последнему известному значению вектора. После введения матрицы задержек легко определить понятие «ближайшие соседи» или просто «соседи». Будем считать соседними к стартовому вектору  $\mathbf{x}_{N-p+1}$  векторы, удовлетворяющие условию:

$$\{\mathbf{x}_s\} : \sum_{s \in \omega_{\Xi}} \|\mathbf{x}_{N-p+1} - \mathbf{x}_s\| \rightarrow \min_{\omega_{N-p+1}},$$

$$s \in \omega_{\Xi} \subset \omega_{N-p+1}, \quad \omega_{N-p+1} \equiv \{1, \dots, N-p+1\}, \quad (6)$$

где  $\Xi$  — количество соседей,  $\omega_{\Xi}$  — набор номеров векторов-соседей. Норма обычно берется евклидова  $L_{2C}$ , хотя возможно использование и дру-

гих норм. Выбор соседей автоматически определяет локальную подобласть, в которой параметры выбранного представления полагаются неизменными. Возможен и обратный вариант: выбрав некоторую окрестность, т.е. задавшись некоторым критерием вида

$$\|x_{N-p+1} - x_s\| \leq \varepsilon, \quad (7)$$

можно также определить соседей. Однако этот критерий практически не применяется, так как выбор величины  $\varepsilon$  является в достаточной мере произвольным, тогда как из-за необходимости оценки параметров на количество соседей налагается существенное ограничение снизу:  $\Xi \geq p + 1$ . В реальных расчетах стараются придерживаться соотношения  $\Xi \cong 3(p + 1)$ , чтобы получать более устойчивые оценки параметров. Таким образом, если выбрать условие (7) и подобрать величину  $\varepsilon$ , обеспечивающую нужное число соседей, все сведется к условию (6).

Второй шаг алгоритма — выбор соседей и задание локальной области — главный отличительный признак метода и самый важный его этап. Выбор «хороших» соседей определяет качество прогноза.

#### 2.1.4. Третий шаг алгоритма LA. Оценка параметров модели и построение прогноза на один шаг вперед

Выбором вида представления (3), (4) или (5) и размерности реконструкции  $p$  устанавливается количество неизвестных параметров, которые требуется оценить по имеющимся данным. При этом круг используемых данных ограничивается набором соседей стартового вектора.

Параметры модели (вектор  $\mathbf{a}$ ) оцениваются методом наименьших квадратов (МНК). Это самый распространенный и наиболее эффективный метод решения подобных задач, хотя и не единственный [38]. Оценка по МНК для вектора  $\mathbf{a}$ , обозначим ее как  $\hat{\mathbf{a}}$ , находится из условия:

$$\hat{\mathbf{a}} : \sum_{\omega_s} (x_{s+1} - f(x_s, \hat{\mathbf{a}}))^2 \rightarrow \min_{\hat{\mathbf{a}}} \quad (8)$$

Однако в большинстве случаев применение МНК в чистом виде невозможно из-за вырожденности матрицы факторов (подробнее об этом см. часть 3), являющегося следствием взаимной близости соседей. Поэтому обычно применяется сингулярное разложение [39]. При этом не всегда учитывается, что оценки, даваемые этим методом, в общем случае смещенные [40], сильно зависящие от машинной точности и выбора минимального значащего сингулярного числа (последний факт упоминается редко). Следовательно, при использовании сингулярного разложения важно контролировать устойчивость получаемых результатов.

Оценив значения параметров аппроксимации, можно построить прогноз следующего значения ряда (стартовый вектор, который в большинстве случаев

совпадает с последним известным вектором, обозначим индексом  $L$ ):

$$\hat{x}_{L+1} = f(x_L, \hat{\mathbf{a}}). \quad (9)$$

Таким образом, пройдя три описанных шага алгоритма LA, можно построить прогноз одного нового значения ряда. Вопрос о способах построения более длинного прогноза подробно рассматривается в разделе 2.3.

Краткой иллюстрацией изложенного алгоритма может служить пример из работы [27]: один из возможных способов построения прогноза температуры на следующий день состоит в том, чтобы, найдя, в какой из предшествующих дней температура была максимально близкой к сегодняшней (случай  $p = 1$ ), взять в качестве прогноза температуры на завтра ее величину в следующий за найденным день. Аппроксимация более высокого порядка позволяет также учитывать влияние на прогноз отклонений «сегодняшней» температуры от температуры в день, наиболее похожий на сегодняшний.

## 2.2. Порядок аппроксимации

### 2.2.1. Тестовые примеры

В этом и следующих разделах представлены качественные результаты сравнения основных вариантов и способов прогноза, основанных на принципе локальной аппроксимации. Сравнение проводится на конкретных примерах нерегулярных временных рядов. Временные ряды сгенерированы на основе уравнения с задержкой Маккея–Гласса (MG):

$$x_{i+1} = (1 - b)x_i + \frac{ax_i - \Delta T}{1 + (x_i - \Delta T)^c},$$

$$a = 0.2, \quad b = 0.1, \quad c = 10, \quad \Delta T = 17$$

и системы Лоренца (LO):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= (r - z)x - y, \\ \dot{z} &= xy - bz, \\ \sigma &= 5, \quad r = 15, \quad b = 1, \quad \Delta t = 0.02. \end{aligned}$$

### 2.2.2. Сравнение вариантов

В разделе 2.1.2 была упомянута возможность использования различных порядков аппроксимации для описания зависимости следующего значения ряда от предыдущих. Роль порядка аппроксимации возрастает с уменьшением длины исходного ряда. (В разделе 4 будет показано, что для очень длинных рядов, т.е. при неограниченном количестве известных точек, роль порядка аппроксимации значительно снижается.)

При ограниченном количестве данных важным фактором становится минимально необходимое количество точек для оценки параметров. Оно зависит от порядка аппроксимации: для аппроксимации



нулевого порядка (LA0) достаточно одной точки, так как есть всего один неизвестный параметр  $a_0$  (см. (4)). При линейной аппроксимации (LA1) количество неизвестных параметров равно  $p+1$  (см. (3)).

Для получения надежных оценок количество соседей должно быть достаточно большим. Существует уже упомянутое эмпирическое правило, в соответствии с которым для успешного применения МНК соседей должно быть как минимум втрое больше, чем оцениваемых параметров. Таким образом, для LA1 в каждой локальной подобласти желательно иметь не менее  $3(p+1)$  известных векторов.

Порядок аппроксимации можно повышать и дальше, однако при этом резко возрастает количество необходимых соседей и увеличивается риск выхода из области справедливости гипотезы о постоянстве коэффициентов, т.е. происходит глобализация метода с потерей преимуществ локальной аппроксимации. Поэтому локальную аппроксимацию выше второго порядка (LA2) обычно не используют.

LA2 отличается от LA1 добавлением в модель парных произведений координат векторов-соседей (5):

$$x_{t+1} = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i x_{t-p+i} + \sum_{j=1}^p \sum_{k \geq j}^p b_{j,k} x_{t-p+j} x_{t-p+k}.$$

Минимальное количество соседей здесь равно  $p+1 + p(p+1)/2$ , и их число растет как квадрат размерности реконструкции, поэтому в число соседей могут попасть вектора очень непохожие на стартовый. Таким образом, главная причина неэффективности локальной аппроксимации старших порядков — одновременное использование большого числа векторов задержек, в результате чего такая аппроксимация становится глобальной, а не локальной. К чему может привести необходимость использовать большое число соседей, часть которых с трудом можно так назвать, показано на рис. 4. Здесь представлены результаты экстраполяции ряда LO методом локальной аппроксимации нулевого, первого и второго порядков. Сгенерированный ряд LO длиной 3600 точек разбит на две части, первая из которых использовалась для оценки параметров аппроксимации (на рис. не показана), а по второй (последние 164 точки) проверялось качество прогноза. На рис. 4 показана только вторая часть исходного ряда и результаты прогнозов, полученные при разных порядках аппроксимации. Параметр  $p$  принят равным пяти. Число соседей взято втрое больше минимально необходимого, т.е. для LA0 — 3 соседа, LA1 —  $3 \cdot (5+1) = 18$  соседей, LA2 — 63. Видно, что LA0 уступает остальным в точности, а LA1 и LA2 дают близкие результаты. По одному примеру нельзя судить о том, какой вариант LA1 или LA2 лучше, но важно другое — роль числа соседей. Для сравнения приведены прогнозы методом LA0 (т.е. простым усреднением прогнозов по всем соседям) с числом соседей, как при LA1 (на рис. 4 линия обозначена

LA0as1) и LA2 (линия LA0as2). Полученные результаты показывают, к чему приводит прогнозирование с избыточным числом соседей: при увеличении числа соседей происходит «сглаживание» прогноза LA0 (ср. линии LA0, LA0as1 и LA0as2), вызванное увеличением различий между векторами, попавшими в число соседей стартового вектора, а следовательно, и их прогнозами. Поэтому использование LA старших порядков (начиная со 2-го), требующее большого количества соседей, при экстраполяции достаточно коротких рядов вряд ли может быть оправдано.

**x** - компонента системы Лоренца

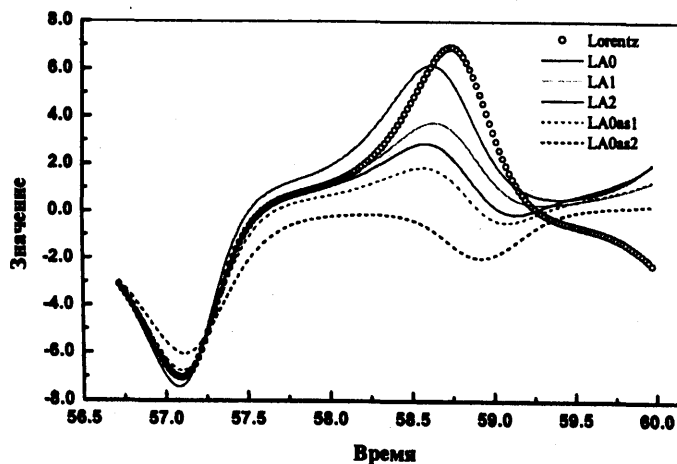


Рис. 4. Фактическая динамика и результат прогнозирования ряда LO методом LA нулевого, первого и второго порядков. Влияние числа соседей

Таким образом, локальная аппроксимация первого порядка имеет по сравнению с аппроксимацией второго порядка два существенных преимущества: во-первых, она требует меньше данных, что важно для коротких рядов, а во-вторых, получить более точное приближение в малой области легче, чем в большой, так как в первом случае различия между значениями менее выражены.

### 2.3. Прогноз на несколько шагов вперед

Рассмотренный в разделе 2.1 общий алгоритм метода LA завершился построением прогноза на один шаг. Чаще всего необходим более долгосрочный прогноз. Метод LA позволяет его построить. Однако к его результатам надо относиться осторожно, постоянно контролировать устойчивость прогноза по отношению к небольшим изменениям исходного ряда. Лучше заранее оценить максимально возможную длину прогноза.

В работе [27] предложено два способа, основанных на принципе локальной аппроксимации и позволяющих строить прогнозы динамики ряда на несколько шагов: итеративный и прямой. Сначала мы рассмотрим лишь их алгоритмы, а сравнение отложим до построения общей модели. К этим двум методам также можно добавить еще один способ — итеративный вариант с пересчетом, который также будет рассмотрен в этом разделе.



### 2.3.1. Итеративный способ прогноза

Пусть требуется построить прогноз на  $T$  шагов вперед. Идея итеративного способа состоит в последовательном построении прогноза на один шаг с добавлением его результата к исходным данным: т. е. сначала делается прогноз на один шаг, затем на основе полученного значения строится новый вектор в пространстве задержек:

$$\hat{x}_{L+1} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{L+1} \\ x_L \\ \vdots \\ x_{L-p+2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Этот вектор подставляется в правую часть выражения (9) и делается прогноз еще на один шаг и т. д. При этом параметры  $\hat{a}$  в (9) выбираются те же, что и на первом шаге. Таким образом, каждое следующее прогнозируемое значение выражается через предыдущее (предыдущие). Отсюда название способа — итеративный.

Основное преимущество данного способа — простота и легкость прогнозирования следующих значений, так как оценка параметров модели проводится всего однажды — на первом шаге. В работе [27] обосновывается предпочтительность именно итеративного способа при работе с хаотическими системами. Однако авторы отмечают, что на практике он не всегда оказывается лучшим. Основная причина невысокой точности прогноза, получаемого этим способом, связана, по-видимому, с неявно используемой предпосылкой о том, что соседями всех строящихся по принципу (10) новых векторов задержек являются те же векторы, которые были соседями стартового. Этот факт следует из неизменности параметров в уравнении (9), и, видимо, является не совсем верным.

### 2.3.2. Итеративный способ с пересчетом параметров

Можно попытаться улучшить итеративный способ, отказавшись от предпосылки идентичности соседей всех новых спрогнозированных векторов. При этом потребуется пересчитывать заново на каждом шаге параметры в выражении (9). Следовательно, чтобы построить прогноз на два шага после получения прогноза на один шаг и определения нового вектора в пространстве задержек (10), который будет теперь считаться стартовым, необходимо полностью повторить процедуру прогнозирования на один шаг и так далее. В этом случае затраты времени на построение длинного прогноза возрастут в сравнении с простым итеративным способом.

Вариант с пересчетом параметров исключает основной недостаток простого итеративного способа, но также имеет свои минусы. Главный — высокая вероятность ошибочного выбора соседей. Поскольку

выбор соседей в этом варианте проводится на каждом шаге, то также на каждом шаге возрастает ошибка прогноза, связанная с вероятностью неправильного выбора. Вследствие этого, особенно при работе со стохастическими рядами, высока вероятность перехода на смежную траекторию. Контроль правильности выбора «нужных» соседей затруднителен, и поэтому применение рассматриваемого способа также может не обеспечивать желаемой надежности прогноза.

### 2.3.3. Прямой прогноз

При прямом способе прогноза на  $T$  шагов вперед стартовый вектор и все его соседи остаются неизменными, а прогноз строится независимо для всех  $t \in [1, \dots, T]$ :

$$\hat{x}_{L+t} = f(x_L, \hat{a}^{(t)}).$$

Таким образом, для выбранных векторов-соседей строится зависимость значения ряда через  $t$  шагов от координат исходного вектора, оцениваются параметры этой зависимости, т. е. коэффициенты  $\hat{a}^{(t)}$ , и по ним затем строится прогноз на  $t$  шагов для стартового вектора. Коэффициенты аппроксимации для всех  $t$  оцениваются независимо.

При прямом прогнозе отсутствуют недостатки двух первых способов — гипотеза неизменности соседей здесь не вызывает сомнения, а накопления ошибки не происходит. Однако этот вариант более требователен к длине ряда, так как для прогноза на  $t$  шагов необходимы соседи, после которых имеется еще, как минимум,  $t$  известных векторов.

Как утверждается в работе [27], применение прямого прогноза менее обосновано, чем итеративного, но, как будет показано в разделе 4, статистически этот способ должен обеспечивать наиболее надежные результаты.

Пример прогноза ряда МГ на 164 шага ( $T = 164$ ) тремя рассмотренными способами иллюстрирует рис. 5. Видно, что при итеративном способе прогноза в представленном примере «отрыв» произошел уже на четвертом шаге и далее «прогноз» начал экспоненциально расти (для  $T = 164$  прогнозные значения уже порядка  $10^{15}$ ), причем получаемые значения больше максимальных значений ряда. Прогноз с пересчетом давал приемлемые результаты дольше, но приблизительно с сорокового шага начались колебания с быстро растущей амплитудой, причем, как и в итеративном способе, абсолютная величина значений прогноза существенно превосходит пиковые значения исходного ряда. К 164-му шагу она достигла величины порядка  $10^6$ .

На основе этого примера можно предположить, что итеративный вариант будет лучшим при очень малых величинах  $T$ , когда справедливо предположение о том, что предсказанный вектор остается

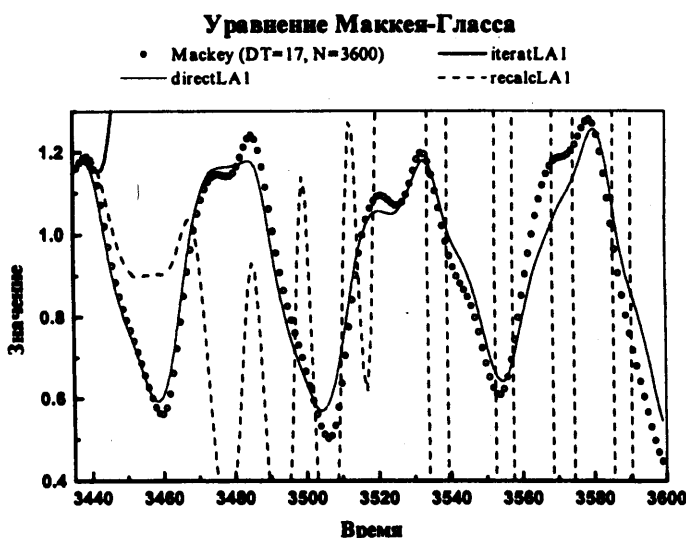


Рис. 5. Прогнозирование методом LA1. Варианты: итеративный (iterat), прямой (direct) и прямой с пересчетом (recalc)

соседом стартового. В остальных случаях, вероятно, прямой прогноз даст более достоверный результат.

### 3. Общая математико-статистическая модель метода локальной аппроксимации

#### 3.1. Построение системы уравнений LA

Рассмотренные выше примеры использования алгоритма LA для экстраполяции двух разных временных рядов позволили сделать выводы об эффективности различных вариантов LA. Однако эти выводы нельзя считать до конца обоснованными, так как они делались на основе анализа нескольких частных примеров. Поэтому для проверки сделанных выводов, а также с целью получения инструмента для выбора оптимального варианта метода без проведения численных расчетов необходимо найти аналитическое решение задачи прогноза методом LA с учетом его различных вариантов. Первым шагом будет построение системы уравнений для определения параметров аппроксимации.

##### 3.1.1. Уравнение LA любого порядка

Вновь обратимся к задаче построения прогноза на один шаг вперед, а точнее — к выбору локального представления. В общем случае функцию  $f(x_t, a)$  из (2) можно представить как:

$$f(x_t, a) = a_0 + a_1 x_t + a_2 x_{t-1} + \dots + a_M x_{t-M+1} + a_{11} x_t^2 + a_{12} x_t x_{t-1} + \dots + a_{111} x_t^3 + a_{112} x_t^2 x_{t-1} + \dots \quad (11)$$

Если положить все коэффициенты кроме  $a_0$  равными нулю, получим LA0. Оставив коэффициенты только с одним индексом, приходим к LA1, с одним и двумя индексами — к LA2 и так далее. Выражение (11) можно представить в виде

$$x_{t+1} = a_0 + \check{x}_t^T \check{a}, \quad (12)$$

где

$$\check{a}^T = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M \ a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{111} \ a_{112} \ \dots),$$

$$\check{x}_t^T = (x_1 \ x_{t-1} \ \dots \ x_{t-M+1} \ x_t^2 \ x_t x_{t-1} \ \dots \ x_t^3 \ x_t^2 x_{t-1} \ \dots)$$

— обобщенный вектор коэффициентов и обобщенный вектор в пространстве задержек соответственно. Для упрощения записи будем использовать единую нумерацию координат этих векторов, а сами векторы обозначать без «шапочки» сверху. Какой именно вектор имеется в виду — обычный или обобщенный — зависит от рассматриваемого порядка LA. Если анализируется любой вариант LA кроме LA1, значит используются обобщенные векторы коэффициентов и задержек.

Таким образом, далее используется единая запись для уравнения LA любого порядка:

$$x_{t+1} = a_0 + x_t^T a, \quad (13)$$

где

$$a^T = (a_1 \ a_2 \ \dots), \quad x_t^T = (x_t \ x_{t-1} \ \dots).$$

##### 3.1.2. Учет постоянной

До сих пор константа  $a_0$  записывалась отдельно от всех остальных коэффициентов. Это делалось не случайно. Вопрос об учете константы оказывается непростым: с одной стороны, ее наличие несколько противоречит идеологии теории Такенса (как будет показано далее, введение константы аналогично добавлению строки из единиц в матрицу задержек), но, с другой стороны, без ее введения велика вероятность систематических ошибок при численных расчетах. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

В стандартном варианте метода LA константа всегда учитывается, хотя в работе [27] об этом специально не упоминается. Рассмотрим следствия учета константы на примере LA1. Перепишем уравнение (13) для LA1 в терминах матрицы задержек:

$$x_{t+1} = (1 \ x_t \ \dots \ x_{t-p+1}) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}.$$

В квадратных скобках стоит транспонированный вектор в пространстве задержек — один из столбцов матрицы задержек. Таким образом, при прогнозировании матрица задержек неявно расширяется за счет добавления строки единиц. А это несколько противоречит принципу ее построения.

Казалось бы, такого необоснованного расширения матрицы задержек в большинстве случаев можно

избежать уже в рамках линейного приближения, увеличив размерность реконструкции на единицу:

$$x_{t+2} = a_0^{\text{II}} + \sum_{i=1}^p a_i^{\text{II}} x_{t-i+2} \Rightarrow x_{t+2} = \sum_{i=1}^{p+1} b_i x_{t-i+2},$$

$$x_{t+1} = a_0^{\text{I}} + \sum_{i=1}^p a_i^{\text{I}} x_{t-i+1} \quad (14)$$

$$b_1 = a_1^{\text{II}} + \frac{a_0^{\text{II}}}{a_0^{\text{I}}}, \quad b_{i=2,p} = a_i^{\text{II}} - a_{i-1}^{\text{I}} \frac{a_0^{\text{II}}}{a_0^{\text{I}}}, \quad b_{p+1} = -a_p^{\text{I}} \frac{a_0^{\text{II}}}{a_0^{\text{I}}}$$

(в (14) предполагается, что  $a_0^{\text{I}}$  отлично от нуля). В последнем выражении константа уже не присутствует. Однако в реальной ситуации при построении регрессионных зависимостей для оценки коэффициентов отсутствие константы может привести к систематическим ошибкам (см. пример на рис. 6). Поэтому константу приходится сохранять, хотя это и плохо обосновано с точки зрения метода задержек.

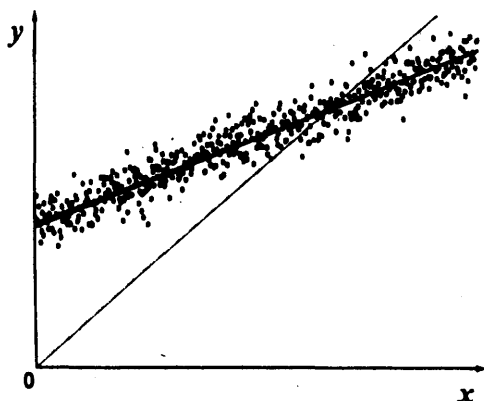


Рис. 6. Учет константы при построении линейной регрессии. Темная линия — константа учитывалась, светлая — нет. Точки — исходные данные

### 3.1.3. Система уравнений LA

Для того чтобы оценить неизвестные коэффициенты  $(a_0, \mathbf{a})$  в уравнении (13), воспользуемся гипотезой их постоянства для всех соседей стартового вектора, т.е. основной гипотезой LA. В результате получится следующая система уравнений

$$\begin{cases} x_{s_1+T} = a_0 + a_1 x_{s_1} + a_2 x_{s_1-1} + \dots + a_p x_{s_1-p+1}, \\ x_{s_2+T} = a_0 + a_1 x_{s_2} + a_2 x_{s_2-1} + \dots + a_p x_{s_2-p+1}, \\ \dots \\ x_{s_{\Xi}+T} = a_0 + a_1 x_{s_{\Xi}} + a_2 x_{s_{\Xi}-1} + \dots + a_p x_{s_{\Xi}-p+1}. \end{cases} \quad (15)$$

Она построена для общего случая прогноза значения ряда, удаленного на  $T$  шагов от последнего известного вектора. Для прогноза на один шаг можно положить  $T = 1$ . В (15) индексы  $s_1, \dots, s_{\Xi}$  указывают номера значений ряда. Перепишем (15) в матричном

виде:

$$\begin{pmatrix} x_{s_1+T} \\ x_{s_2+T} \\ \vdots \\ x_{s_{\Xi}+T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} a_0 + \begin{pmatrix} x_{s_1} & x_{s_1-1} & \dots & x_{s_1-p+1} \\ x_{s_2} & x_{s_2-1} & \dots & x_{s_2-p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{s_{\Xi}} & x_{s_{\Xi}-1} & \dots & x_{s_{\Xi}-p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \quad (16)$$

Рассмотрим выражение (16). Самая большая матрица (матрица соседей) — это транспонированный фрагмент матрицы задержек, состоящий лишь из одних соседей стартового вектора (в случае LA1). Левая часть представляет собой результаты эволюции каждого из соседей за  $T$  шагов.  $\{a_0, \dots, a_p\}$  — параметры аппроксимации, которые надо определить. При нулевом порядке система (16) трансформируется в

$$\begin{pmatrix} x_{s_1+T} \\ x_{s_2+T} \\ \vdots \\ x_{s_{\Xi}+T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} a_0.$$

Для упрощения записи перепишем выражение (16), обозначив величину  $x_{s_k+T}$  как  $y_k$ , где  $k$  — номер соседа, а матрицу соседей (возможно, обобщенную — см. п. 3.1.1) —  $\mathbf{X}$ . Для вектора коэффициентов оставим обозначение  $(a_0, \mathbf{a})$ . Тогда общий вид системы уравнений (15) в векторной форме будет

$$\mathbf{Y} = \mathbf{I} a_0 + \mathbf{X} \mathbf{a}, \quad (17)$$

где  $\mathbf{I}_{\Xi \times 1}$  — вектор из единиц. Требуется оценить параметры  $(a_0, \mathbf{a})$ .

### 3.2. Аналитический вид решения задачи прогноза методом LA

Решение системы (17) будем искать с помощью МНК. Критерий МНК для уравнения (17) (ср. (8)) имеет вид:

$$\Phi = (\mathbf{Y} - \mathbf{I} a_0 - \mathbf{X} \mathbf{a})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{I} a_0 - \mathbf{X} \mathbf{a}) \rightarrow \min_{\{a_0, \mathbf{a}\}}.$$

Условия первого порядка этой экстремальной задачи

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_0}: -2\mathbf{I}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{I} a_0 - \mathbf{X} \mathbf{a}) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{a}}: -2\mathbf{X}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{I} a_0 - \mathbf{X} \mathbf{a}) = 0. \quad (19)$$

Выразим  $a_0$  из (18):

$$a_0 = \frac{\mathbf{I}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X} \mathbf{a})}{\mathbf{I}^T \mathbf{I}}. \quad (20)$$

Здесь  $\mathbf{I}^T \mathbf{I}$  равно просто  $\Xi$ . Подставляем  $a_0$  в (19), получим оценку вектора коэффициентов  $\mathbf{a}$ :

$$\hat{\mathbf{a}} = \left[ \mathbf{X}^T \left( \mathbf{E} - \frac{\mathbf{I} \mathbf{I}^T}{\mathbf{I}^T \mathbf{I}} \right) \mathbf{X} \right]^{-1} \mathbf{X}^T \left( \mathbf{E} - \frac{\mathbf{I} \mathbf{I}^T}{\mathbf{I}^T \mathbf{I}} \right) \mathbf{Y}, \quad (21)$$

где  $\mathbf{E}_{\Xi \times \Xi}$  — единичная матрица. Выражение (21) определяет все необходимые для построения прогноза коэффициенты (оценку  $\hat{a}_0$  можно получить

из выражения (20), подставив в него вместо коэффициентов  $\mathbf{a}$  их оценки, полученные из (21)), если, конечно, матрица в квадратных скобках обратима. Вопрос обратимости этой матрицы и способы расчета коэффициентов, если она необратима, требует отдельного рассмотрения и специальных методов, что существенно усложняет процедуру расчета. Кроме того, недостаточное внимание к указанной проблеме может приводить к значительным ошибкам прогноза.

Полученные оценки коэффициентов позволяют получить аналитическое выражение для прогнозного значения ряда  $\hat{x}_{L+T}$  в момент  $L+T$ . Сделаем это поэтапно, одновременно анализируя получаемые результаты.

Сначала подставим в уравнение (13) стартовый вектор  $\mathbf{x}_L$  (возможно, обобщенный по принципу (12))

$$\hat{x}_{L+T} = \hat{a}_0 + \mathbf{x}_L^T \hat{\mathbf{a}}$$

и только что полученную оценку  $\hat{a}_0$ :

$$\hat{x}_{L+T} = \frac{\mathbf{I}^T}{\mathbf{I}^T \mathbf{I}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\mathbf{a}}) + \mathbf{x}_L^T \hat{\mathbf{a}}.$$

Преобразуем полученное выражение следующим образом

$$\hat{x}_{L+T} = \bar{\mathbf{Y}} + (\mathbf{x}_L^T - \bar{\mathbf{X}}) \hat{\mathbf{a}}. \quad (22)$$

Здесь  $\bar{\mathbf{Y}}$  — среднее значение вектора  $\mathbf{Y}$ , т.е. не что иное, как прогноз по LA0.  $\bar{\mathbf{X}}$  — вектор средних значений координат в матрице соседей  $\mathbf{X}$ , т.е. «усредненный» сосед.

Последнее выражение имеет особый смысл. Оно показывает, что прогноз, полученный методом локальной аппроксимации любого порядка, есть линейная комбинация прогноза нулевого порядка и отклонений стартового вектора от «усредненного» соседа. Отсюда вытекают два важных следствия. Первое: поправка, обусловленная отклонением стартового вектора от «усредненного» соседа, корректирует неравномерность распределения соседей вокруг стартового вектора. Это следует из того, что в случаях, когда стартовый вектор одновременно является и центральным (с учетом выбранного порядка аппроксимации), т.е. совпадает с «усредненным» соседом, поправка к прогнозу по LA0 в соответствии с (22) оказывается равной нулю. Частным случаем такого распределения является полное совпадение соседей и стартового вектора. Такая ситуация может возникнуть при анализе периодического ряда. Другое следствие состоит в том, что поправка прогноза зависит именно от отклонения стартового вектора от центрального вектора для соседей, а не от абсолютных значений координат векторов. Следовательно, при численных расчетах методом LA правильнее рассматривать не сами векторы-соседи, а их отклонения от гипотетического центрального вектора.

Возвращаясь к вопросу о включении константы в уравнение (13), заметим, что метод LA0 в отсутствие константы не реализуется и, следовательно, рассмот-

ренные свойства решения задачи прогноза LA без постоянной не проявляются.

Запишем в явном виде решение задачи прогноза по методу LA. На основе выражений (21), (22) имеем:

$$\hat{x}_{L+T} = \bar{\mathbf{Y}} + (\mathbf{x}_L - \bar{\mathbf{X}}) \left[ (\mathbf{X} - \mathbf{I}\bar{\mathbf{X}})^T (\mathbf{X} - \mathbf{I}\bar{\mathbf{X}}) \right]^{-1} \times (\mathbf{X} - \mathbf{I}\bar{\mathbf{X}})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{I}\bar{\mathbf{Y}}). \quad (23)$$

Здесь использовано свойство

$$\left( \mathbf{E} - \frac{\mathbf{I}\mathbf{I}^T}{\mathbf{I}^T \mathbf{I}} \right) = \left( \mathbf{E} - \frac{\mathbf{I}\mathbf{I}^T}{\mathbf{I}^T \mathbf{I}} \right)^T \left( \mathbf{E} - \frac{\mathbf{I}\mathbf{I}^T}{\mathbf{I}^T \mathbf{I}} \right).$$

Из соотношения (23) видно, что в выражении для прогноза все исходные данные, кроме  $\bar{\mathbf{Y}}$  («усредненного» прогноза, совпадающего с прогнозом LA0), входят в виде отклонений:  $(\mathbf{x}_L - \bar{\mathbf{X}})$  — отклонение стартового вектора от «усредненного» соседа;  $(\mathbf{X} - \mathbf{I}\bar{\mathbf{X}})^T$  — матрица отклонений соседей от «усредненного» соседа;  $(\mathbf{Y} - \mathbf{I}\bar{\mathbf{Y}})$  — вектор отклонений индивидуальных «результатов эволюции» соседей за  $T$  шагов от среднего варианта эволюции. Таким образом, произошел переход к центрированным величинам.

Уравнение (23) может быть непосредственно использовано для получения прогноза методом LA при численных расчетах. Единственным условием его применения является обратимость матрицы, стоящей в квадратных скобках. К сожалению, при достаточно длинном ряде и соседях, близких к стартовому вектору, эта матрица плохо обусловлена, и для решения уравнения требуется применение специальных методов.

#### 4. Выбор оптимального варианта LA при прогнозировании на несколько шагов вперед на основе математико-статистической модели

Полученное в предыдущем разделе в явном виде решение задачи прогноза методом LA может быть использовано для анализа различных свойств прогноза, таких, как точность, устойчивость и другие, без проведения численных расчетов. Сравнение же свойств прогнозов, получаемых в разных вариантах LA, позволяет выбрать оптимальный вариант метода.

##### 4.1. Способы решения задачи прогноза на несколько шагов вперед

Основные варианты построения прогноза на несколько шагов вперед методом LA качественно были описаны выше. Остановимся на их реализации в рамках общей модели LA.

Первый шаг во всех вариантах одинаков — построение методом LA выбранного порядка прогноза для момента времени  $L+1$ . При этом оцениваются параметры аппроксимации  $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a})$ . На основе полученного прогноза достраивается матрица  $\mathbf{X}$  посред-

ством добавления к ней нового вектора, содержащего в качестве первой координаты спрогнозированное значение (10). Дальше способы прогноза расходятся.

#### 4.1.1. Итеративный способ прогноза

В этом варианте предполагается, что получившийся вектор — сосед стартового. Как было отмечено в разделе 2.3, такое предположение весьма сомнительно, особенно если рассматривается случай больших временных интервалов между значениями ряда. Применительно к модели LA оно означает, что коэффициенты  $\mathbf{a}$  для вектора (10) при прогнозе  $(L+2)$ -го значения ряда совпадают с коэффициентами, рассчитанными для стартового вектора, и, следовательно, прогнозируемое выражение для  $(L+T)$ -го значения ряда (ср. (22)) имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}}_{L+T} = \bar{Y}^{(L+1)} + \left( \left( \hat{\mathbf{x}}_{L+T-1}^{(L+T)} \right)^T - \bar{\mathbf{X}}^{(L+1)} \right) \hat{\mathbf{a}}^{(L+1)}. \quad (24)$$

Индексы в скобках показывают, на каком шаге прогноза рассчитывается соответствующая величина:  $(L+1)$  означает, что она рассчитывается только на первом шаге и далее не пересчитывается; значение с индексом  $(L+T)$  вычисляется заново на каждом шаге. В выражении (24) все величины за исключением вектора  $\hat{\mathbf{x}}_{L+T-1}^{(L+T)}$ , рассчитанного на предыдущем шаге прогноза, остаются неизменными для всех прогнозируемых моментов времени. Этот факт отражен в их индексах  $(L+1)$ . Вектор координат «усредненного» соседа  $\bar{\mathbf{X}}^{(L+1)}$  рассчитан по исходному набору соседей и также не зависит от номера шага прогноза.

Основное преимущество итеративного способа — быстрота и легкость расчета, поскольку не надо искать заново соседей и пересчитывать коэффициенты. Главный недостаток — необходимость принятия не бесспорного предположения, что любой вектор  $\hat{\mathbf{x}}_{L+T-1}^{(L+T)}$  является соседом стартового вектора.

В работе [27] показано, что этот вариант теоретически наиболее обоснован. Мы не будем рассматривать это доказательство, отметим только, что для базового варианта LA0 прогноз этим способом даст универсальный результат:

$$\bar{\mathbf{x}}_{L+T} = \bar{Y}^{(L+1)} = \text{const}(T). \quad (25)$$

Таким образом, прогноз по LA0 итеративным способом для любого ряда и на любой период — константа, не зависящая от времени. Этот результат при всей его очевидной ошибочности является следствием предположения, на котором основан итеративный способ.

#### 4.1.2. Прямой прогноз для каждого следующего момента времени

Прогноз этим способом проводится независимо для всех искомым значений ряда, т. е. прогноз зна-

чения ряда в момент  $L+1$  никак не влияет на построение прогноза для значения ряда в момент  $L+2$ . Прямой способ прогноза реализуется подстановкой в левую часть основного уравнения LA (16) результатов эволюции соседей за нужное число шагов. Таким образом, для прогноза значения ряда в момент  $L+T$  в левую часть (16) нужно подставить те значения векторов-соседей, в которые они перешли за  $T$  шагов. Общий вид прогноза  $(L+T)$ -го значения ряда прямым способом в тех же обозначениях, которые использовались для описания итеративного способа, задается выражением:

$$\hat{\mathbf{x}}_{L+T} = \bar{Y}^{(L+T)} + \left( \left( \mathbf{x}_L^{(L+1)} \right)^T - \bar{\mathbf{X}}^{(L+1)} \right) \hat{\mathbf{a}}^{(L+T)}.$$

При использовании этого способа на каждом шаге пересчитываются как прогноз LA0 (значение  $\bar{Y}^{(L+T)}$ ), так и коэффициенты линейной комбинации (вектор  $\hat{\mathbf{a}}^{(L+T)}$ ), при этом стартовый вектор и соседи остаются неизменными.

В отличие от итеративных вариантов прямой способ прогнозирования не может дать неограниченно возрастающий прогноз, так как здесь не происходит накопления ошибки прогноза, а ошибка прогноза одного шага не влияет на прогноз следующего. В случае итеративного прогноза ошибка на первом шаге в соответствии с (24) повлияет на прогноз для второго шага и так далее. Следовательно, единственная значительная ошибка на одном из шагов при итеративном способе прогнозирования сделает бессмысленным весь дальнейший прогноз.

#### 4.1.3. Итеративный способ с пересчетом параметров

Этот вариант, оставаясь по существу итеративным, не использует предположения, что каждый новый предсказанный вектор является соседом стартового. При прогнозировании этим способом для каждого нового вектора прогноза определяются свои соседи. Таким образом, алгоритм предсказания данным вариантом LA следующий: определить соседей стартового вектора (в отличие от простого итеративного варианта здесь эта процедура должна осуществляться на каждом шаге), построить прогноз на один шаг вперед, добавить полученный вектор как последний в матрицу  $\mathbf{X}$  и выбрать его в качестве стартового. Повторением этой процедуры  $T$  раз можно получить прогноз для значений ряда в моменты  $L+1, L+2, \dots, L+T$ . Если в частном случае окажется, что на каждом шаге прогноза соседи стартового вектора были одни и те же, то результат прогноза совпадет с результатом простого итеративного способа.

Общий вид решения задачи прогноза для  $(L+T)$ -го значения ряда при использовании ите-

ративного способа с пересчетом параметров можно записать как

$$\hat{x}_{L+T} = \bar{Y}^{(L+T)} + \left( \left( \hat{x}_{L+T-1}^{(L+T)} \right)^T - \hat{X}^{(L+T)} \right) \hat{a}^{(L+T)}.$$

В рассматриваемом способе для расчета вектора  $\hat{X}^{(L+T)}$  («усредненный» сосед) могут использоваться результаты прогнозов предшествующих значений ряда, поэтому к его обозначению добавлена «крышка». Заметим, что эта особенность не всегда ведет к повышению устойчивости получаемого результата.

#### 4.1.4. Качественное сравнение рассмотренных способов

Вернемся к примеру из работы [27] о прогнозировании погоды и рассмотрим, как работает каждый из описанных способов. Ограничимся вариантами нулевого порядка (LA0) и выбором только одного ближайшего соседа. Тогда алгоритм действий при итеративном способе можно представить следующим образом: находим в истории день с наиболее похожей на сегодняшний день погодой, смотрим, какая погода была в следующий за ним день, и утверждаем, что такая же погода будет завтра, послезавтра и всегда. При использовании прямого способа прогнозом на завтра будет та погода, что была в день, следующий за найденным в истории; на послезавтра — та, что была через день после найденного, и так далее. Здесь может возникнуть некоторая сложность, связанная с тем, что наиболее похожим на сегодняшний день может оказаться вчерашний. Тогда для прогноза на послезавтра придется искать другого соседа, так как мы не знаем достоверно, какая «была» (точнее, «будет») погода через день после вчерашнего дня, т.е. завтра. Но эту проблему можно легко снять, ограничив заранее выбор соседей только теми из них, которые удалены от сегодняшнего дня на необходимую длительность прогноза. Наконец, при использовании итеративного способа с пересчетом получится следующая последовательность действий: предсказываем погоду на завтра; считая, что угадали, для прогноза на послезавтра ищем день с погодой, наиболее похожей на только что сделанный прогноз, и утверждаем, что послезавтра погода будет такой же, как в день, последовавший за ним.

В качестве основного результата проведенного сравнения можно выдвинуть предположение, что наиболее устойчивым методом, дающим самый точный прогноз среди рассмотренных способов, является прямой способ прогноза. Он более полно, чем простой итеративный способ, использует имеющуюся информацию и более устойчив к ошибкам в данных и в вычислениях, чем любой из итеративных вариантов.

#### 4.2. Величина ошибки прогноза: предпосылки выбора порядка аппроксимации и способа прогнозирования

Имея общий вид выражения для прогнозируемого значения ряда в момент  $L + T$ , можно оценить, насколько оно в среднем отличается от истинного значения ряда в этот момент. Для этого предположим, во-первых, что истинное значение ряда в момент  $L + T$  существует и, во-вторых, что оно задается некоторой гладкой функцией вида:

$$x_{L+T} = f_T(x_L). \quad (26)$$

Введем ошибку прогноза на шаге  $T$  как

$$E_T = |x_{L+T} - \hat{x}_{L+T}|. \quad (27)$$

Цель настоящего раздела получить явное выражение для ошибки прогноза в случае итеративного и прямого способов прогнозирования. В случае итеративного способа с пересчетом параметров оценить ошибку значительно сложнее, поскольку возможно изменение набора соседей стартового вектора.

##### 4.2.1. Нулевой порядок

При нулевом порядке аппроксимации, следуя (25), прогнозируемое значение ряда при итеративном способе будет представляться как

$$\hat{x}_{L+T}^{(iter)} = \frac{1}{\Xi} \sum_{s=1}^{\Xi} f_1(x_L + \delta_s), \quad (28)$$

где суммирование ведется по всем соседям стартового вектора. Вектор  $\delta_s$  задает отклонение соседа с номером  $s$  от стартового вектора. Выражение для того же значения ряда, полученное прямым способом, имеет вид

$$\hat{x}_{L+T}^{(direct)} = \frac{1}{\Xi} \sum_{s=1}^{\Xi} f_T(x_L + \delta_s). \quad (29)$$

Подставляя соотношения (28) и (29) в (27), получим значения ошибок прогноза:

$$E_T^{(iter)} = |x_{L+T} - \langle f_1(x_L + \delta) \rangle|, \quad (30)$$

$$E_T^{(direct)} = |x_{L+T} - \langle f_T(x_L + \delta) \rangle|. \quad (31)$$

Усреднение, обозначенное угловыми скобками, ведется по всем соседям. Воспользуемся разложением в ряд функции  $f_T(x_L + \delta_s)$  в окрестности вектора  $x_L$ :

$$f_T(x_L + \delta_s) = x_{L+T} + \sum_{k=1}^p \left. \frac{\partial f_T}{\partial x_k} \right|_{x_L} (\delta_s)_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^p \left. \frac{\partial^2 f_T}{\partial x_k \partial x_j} \right|_{x_L} (\delta_s)_k (\delta_s)_j + O(|\delta_s|^3), \quad (32)$$

где  $k$  и  $j$  соответствуют номерам компонент вектора, т.е. аргумента функции  $f_T(x)$ . Перепишем соотно-

шения (30) и (31), используя разложение (32) до первого порядка по  $|\delta|$ :

$$E_T^{(iter)} = |x_{L+T} - x_{L+1}| + O(|\delta|),$$

$$E_T^{(direct)} = O(|\delta|).$$

В предельном случае, когда соседи распределены равномерно вокруг стартового вектора и, следовательно,  $|\delta| \rightarrow 0$ , прогноз по прямому способу стремится к истинному значению, тогда как прогноз по итеративному способу имеет систематическую неубывающую ошибку. Таким образом, более предпочтительным оказывается прямой способ прогноза.

### Старшие порядки аппроксимации

При аппроксимации ненулевого порядка в соответствии с (24) решение задачи прогноза итеративным способом можно представить в виде

$$\hat{x}_{L+T}^{(iter)} = (\bar{Y}^{(L+1)} - \bar{X}^{(L+1)} \hat{a}^{(L+1)}) \hat{b}_0 + x_L^T \hat{b}.$$

Это результат последовательных итераций по выражению (24). Здесь  $(\hat{b}_0 \hat{b}^T)$  — некоторые коэффициенты. Их значения зависят только от координат найденного на первом шаге вектора параметров  $(\hat{a}_0 \hat{a}^T)$  и длительности прогноза. Таким образом, итеративный способ в лучшем случае дает линейную по координатам стартового вектора аппроксимацию функции (26). Последнее означает, что если выбран порядок аппроксимации  $p$ , то происходит нелинейная аппроксимация  $p$ -го порядка с постоянными коэффициентами.

Независимо от выбранного порядка метода прямой вариант LA в общем случае дает аппроксимацию первого порядка. Тем не менее и в этом варианте увеличение порядка LA может повышать точность аппроксимации.

Рассмотрим прямой вариант LA1 в одномерном случае. Ошибку прогноза в соответствии с выражениями (31), (32) можно представить как

$$E_T^{(direct)} = \left| \left( f_T'(x) - \hat{f}_T' \right) \frac{\sum_{s=1}^{\Xi} \delta_s}{\Xi} - f_T''(x) \frac{\sum_{s=1}^{\Xi} \delta_s^2}{2\Xi} + O(\delta^3) \right|. \quad (33)$$

Видно, что переход от нулевого к первому порядку позволяет снизить вклад в ошибку линейного члена по  $\delta$  за счет оценки величины производной. В случае равномерного распределения соседей вокруг стартового вектора, так же как и при нулевом порядке, получается аппроксимация с точностью до второго порядка по отклонению. Иногда к хорошим результатам приводит увеличение порядка метода, т. е. переход к LA2.

Главное достоинство прямого варианта LA — это уменьшение ошибки с приближением соседей к стартовому вектору: при ограниченности  $f_T''(x)$  и  $\delta \rightarrow 0$ ,

$E_T^{(direct)} \rightarrow 0$ . Такого не происходит в итеративном варианте: ошибка  $E_T^{(iter)}$  определяется поведением функции  $f_T$  и независимо от величины отклонений может быть сравнима с самим значением прогноза начиная уже со второго шага.

Общий вывод из проведенного анализа следующий: итеративный вариант нулевого порядка полностью соответствует определению и дает аппроксимацию нулевого порядка, т. е. прогноз на любое количество шагов аппроксимируется значением прогноза на один шаг вперед. В то же время при прямом варианте LA0 сразу получается аппроксимация первого порядка, а при равномерном распределении соседей вокруг стартового вектора — второго порядка.

Таким образом, при использовании прямого варианта LA0 прогноз тем точнее, чем ближе и равномернее относительно стартового вектора распределены соседи, тогда как итеративный вариант подобен стоящим часам, которые иногда показывают точное время. Использование в итеративном варианте LA высших порядков позволяет качественно улучшить прогноз, но с увеличением порядка для оценки параметров требуется больше соседей. Это приводит к снижению качества прогноза. Поэтому при использовании итеративного варианта важен оптимальный выбор порядка аппроксимации. В прямом варианте LA выбрать порядок легче. Если ряд короткий и соседи распределены неравномерно вокруг стартового вектора, то оптимален LA1, так как в этом случае минимизируется вклад в величину ошибки прогноза линейного по отклонениям слагаемого в (33). Дальнейшее увеличение порядка аппроксимации к качественному улучшению не приведет. В случае длинного ряда с равномерным распределением соседей линейное слагаемое в (33) в силу своей малости практически не влияет на величину ошибки, и здесь может оказаться полезным применение LA2.

### 4.2.2. Асимптотические свойства прогноза методом LA и выбор способа прогнозирования на несколько шагов вперед

Рассмотрим случай прогноза бесконечно удаленного значения ряда:  $T \rightarrow \infty$ . Для ряда, представимого функцией, являющейся решением дифференциального уравнения порядка  $p$ , все методы, кроме итеративного LA0, дадут точный прогноз. В случае стохастического ряда итеративный вариант даст неограниченно возрастающий либо убывающий прогноз (исключение — вариант нулевого порядка, в котором прогноз для любого шага совпадает со значением прогноза на первом шаге). Результатом прогноза прямым способом будет средневзвешенная величина, учитывающая пространственное распределение значений ряда. Таким образом, при  $T \rightarrow \infty$  прямой вариант дает более приемлемый результат, чем итеративный.



Оценим для прямого и итеративного вариантов ошибку прогноза, связанную с конечной точностью вычислений. Введем несколько дополнительных предположений:

1. Исходный ряд бесконечно длинный, т. е. всегда можно найти необходимое количество истинных соседей для стартового вектора.

2. Аппроксимация функции  $f_T(\mathbf{x})$ :  $x_{L+T} = f_T(x_L)$  любым из рассматриваемых вариантов прогноза является абсолютно точной, т. е. дает те же значения, которые были бы получены с помощью истинной функции.

3. Единственная причина ошибки при прогнозировании — конечность представления числовых значений ряда (ограниченность машинной точности представления чисел). Поэтому в процессе расчетов вместо истинного значения ряда подставляется ближайшее округленное значение, отличающееся от истинного на величину, не превосходящую  $\delta$  (параметр, характеризующий машинную точность представления чисел). Тогда ошибка  $\varepsilon$ , возникающая из-за этого ограничения, распределена равномерно в интервале  $(-\delta, \delta)$ . Дисперсия такой величины равна  $\delta^2/3$ . Для обозначения ошибки воспользуемся следующей символикой:  $\varepsilon(0, \delta^2/3)$ . Первая цифра в скобках — математическое ожидание ошибки, вторая — дисперсия.

4. Будем рассматривать одномерный случай и предположим, что  $|df_T(\mathbf{x})/d\mathbf{x}| \approx k^T$ , где  $k$  — величина, которая определяется параметрами системы и не зависит от  $T$  и  $\mathbf{x}$ . Несмотря на то, что величина  $\mathbf{x}$  — теперь скаляр, оставим для нее прежнее полужирное написание.

Рассмотрим последнее предположение. Показатель Ляпунова для исследуемой одномерной системы [27] определяется как

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \ln \left| \frac{df_t(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_L} \right).$$

Таким образом, при достаточно больших  $t$  можно считать, что

$$\left| \frac{df_t(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right| \approx e^{\lambda t}.$$

Учитывая, что  $t = \tau T$ , где  $\tau$  — промежуток времени между значениями ряда, и считая, что  $\tau$  достаточно велико, получим:

$$\left| \frac{df_t(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right| \approx e^{\lambda \tau T} = (e^{\lambda \tau})^T = k^T.$$

Оценим далее в рамках указанных предположений ошибку прогноза на шаге  $T$ . При условии бесконечности ряда для любого стартового значения ряда  $x_L$  всегда найдется ближайший сосед  $\mathbf{x}$ , совпадающий с ним в пределах ошибки округления:  $\mathbf{x} = x_L + \varepsilon(0, \delta^2/3)$ . В таком случае значение прогноза на шаге  $T$  будет с точностью до ошибки округления

совпадать со значением, в которое за  $T$  шагов перейдет ближайший сосед стартового вектора:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{L+T} &= f_T(\mathbf{x}) + \varepsilon \left( 0, \frac{\delta^2}{3} \right) = \\ &= f_T \left( x_L + \varepsilon \left( 0, \frac{\delta^2}{3} \right) \right) + \varepsilon \left( 0, \frac{\delta^2}{3} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Разложим функцию эволюции (34) в ряд по степеням отклонения соседа от стартового вектора (до первого порядка включительно). Тогда

$$\begin{aligned} \hat{x}_{L+T} &= f_T(x_L) + \varepsilon \left( 0, \frac{\delta^2}{3} \right) \left. \frac{df_T(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right|_{x_L} + \\ &+ O(\varepsilon^2) + \varepsilon \left( 0, \frac{\delta^2}{3} \right) \approx \\ &\approx x_{L+T} + \varepsilon \left( 0, \frac{\delta^2}{3} \right) \left. \frac{df_T(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right|_{x_L} + \varepsilon \left( 0, \frac{\delta^2}{3} \right) \approx \\ &\approx x_{L+T} + \varepsilon \left( 0, \frac{\delta^2}{3} \right) k^T + \varepsilon \left( 0, \frac{\delta^2}{3} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Считая ошибки в последней строке (35) некоррелированными, получим:

$$\hat{x}_{L+T} = x_{L+T} + \varepsilon \left( 0, \frac{\delta^2}{3} (k^{2T} + 1) \right). \quad (36)$$

Из выражения (36) видно, что при прямом способе прогнозирования математическое ожидание прогноза должно совпадать с истинным значением, а дисперсия прогноза равна

$$D_T^{\text{direct}} = \frac{\delta^2}{3} (k^{2T} + 1). \quad (37)$$

В случае итеративного прогноза на первом шаге в соответствии с (36) получим:

$$\hat{x}_{L+1} = x_{L+1} + \varepsilon \left( 0, \frac{\delta^2}{3} (k^2 + 1) \right).$$

Значение прогноза на втором шаге в соответствии с (34) и по аналогии с выражениями (35) и (36) примет вид

$$\begin{aligned} \hat{x}_{L+2}^{\text{iter}} &= f_1(\hat{x}_{L+1}) + \varepsilon \left( 0, \frac{\delta^2}{3} \right) = \\ &= f_1(x_{L+1}) + \varepsilon \left( 0, \frac{\delta^2}{3} (k^2 + 1) \right) k + \varepsilon \left( 0, \frac{\delta^2}{3} \right) = \\ &= x_{L+2} + \varepsilon \left( 0, \frac{\delta^2}{3} [(k^2 + 1)k^2 + 1] \right). \end{aligned}$$

Следовательно, происходит накопление ошибки округления на каждом шаге. Продолжая построение прогноза для следующих шагов, можно получить общее выражение для дисперсии ошибки прогноза в итеративном варианте:

$$D_T^{\text{iter}} = \frac{\delta^2}{3} d_T, \quad d_T = d_{T-1}k^2 + 1, \quad d_0 = 1$$

или

$$D_T^{\text{iter}} = \frac{\delta^2}{3} \sum_{j=0}^{T-1} k^{2j} = \frac{\delta^2}{3} \left( k^{2T} + \sum_{j=1}^{T-1} k^{2j} + 1 \right). \quad (38)$$

Математическое ожидание в итеративном варианте также должно (при точной аппроксимации функции преобразования) совпадать с истинным значением ряда.

Сравнивая выражения (38) и (37), можно заметить, что  $D_T^{\text{iter}} \geq D_T^{\text{direct}}$ , причем равенство возможно только либо при  $k = 0$ , либо при  $T = 1$ . В остальных случаях  $D_T^{\text{iter}} > D_T^{\text{direct}}$ , т. е. ошибка прогноза в итеративном варианте должна быть не меньше, чем при прямом варианте прогноза. Значит прямой вариант прогнозирования снова предпочтительнее итеративного. В случае нехаотического поведения системы  $k = 1$  и  $D_T^{\text{direct}} = (\delta^2/3) \cdot 2$ ,  $D_T^{\text{iter}} = (\delta^2/3)(T + 1)$ . Рост  $D_T^{\text{iter}}$  с увеличением  $T$  — это следствие увеличения ошибки за счет последовательных округлений. То же самое происходит, если вместо измерения отрезка целиком разбить его на части и измерять каждую часть отдельно, округляя получаемые результаты. В предельном случае, если длина любой части отрезка окажется меньше половины деления линейки (при стандартных правилах округления в сторону ближайшего целого), то общая длина отрезка, измеренная таким образом, получится нулевой, вне зависимости от его реальной длины.

Основным результатом проведенного сравнения вариантов LA является установление факта, что наиболее универсальным методом при прогнозировании достаточно длинных стационарных нерегулярных временных рядов является прямой вариант LA0. С одной стороны, он может обеспечивать прогнозирование с величиной ошибки, убывающей пропорционально среднему квадрату отклонений соседей от стартового вектора. С другой стороны, расчет по этому методу является самым простым из всех рассмотренных. Кроме того, при его использовании не вносятся дополнительные ошибки, связанные с методом поиска коэффициентов. Это полностью соответствует интуитивно понятному методу прогноза по историческим аналогиям. В случае ограниченного набора данных или их неравномерного распределения вокруг стартового вектора можно воспользоваться прямым вариантом LA1.

### 4.3. Результаты численного сравнения

Осуществить проверку соотношений (37) и (38) для стохастических рядов численно не представляется возможным, так как первые два предположения, на основе которых они были выведены, на практике не реализуемы, однако можно сравнить точности прогнозов, получаемые различными вариантами LA. В качестве объектов для сравнения точности прогнозов выберем те же ряды MG и LO, а сравнивать получаемые прогнозы будем, следуя работе [27], по величине нормированной среднеквадратичной ошиб-

ки или ошибки прогноза:

$$E = \sqrt{\frac{\langle (f_{t+T} - \hat{f}_{t+T})^2 \rangle_t}{\langle (f_t - \langle f_t \rangle_t)^2 \rangle_t}} \quad (39)$$

Усреднение проводится по моментам начала прогноза. Естественно, чем меньше ошибка прогноза, тем он лучше. Если величина  $E$  превышает единицу, то прогноз неудачный и вместо него лучше взять среднее значение ряда. Для большей надежности получаемой оценки ошибки в формуле (39) используется не арифметическое среднее по начальным моментам прогноза, а медиана.

Рассмотрим сначала ряд MG при тех же условиях, что и в работе [27]:  $N = 10000$ ,  $\tau = 6$ ,  $p = 4$ , количество соседей — вдвое больше минимального, т. е.  $\Xi = 2$  для LA0,  $\Xi = 10$  для LA1 и  $\Xi = 30$  для LA2. Результаты сравнения представлены на рис. 7. Для данного примера лучшим оказался итеративный вариант с пересчетом, причем если для нулевого порядка его преимущество незначительно, то при применении старших порядков аппроксимации этот вариант имеет абсолютное преимущество перед прямым вариантом LA. Прогноз по итеративному варианту LA оказался совершенно неудачным и просто несравнимым с другими вариантами (см. врезку к рис. 7). Этот результат принципиально отличается от полученного при тех же условиях в работе [27]. Там итеративный вариант оказался лучше прямого.

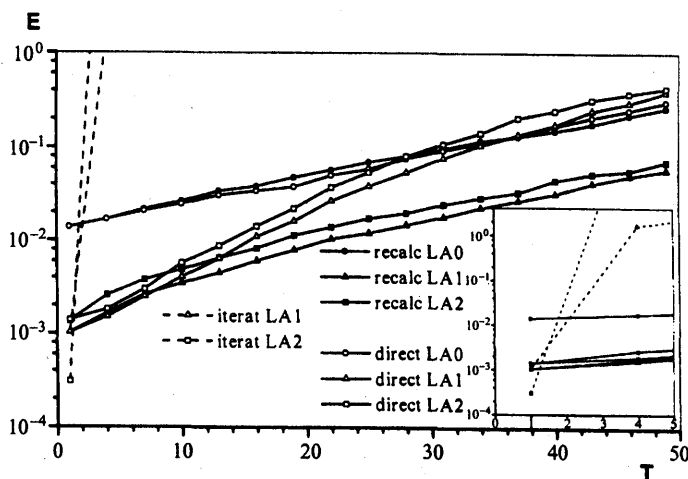


Рис. 7. Зависимость ошибки ( $E$ ) от длины прогноза ( $T$ ) ряда MG ( $\tau = 6$ ). Итеративный вариант обозначен как iterat, прямой — direct, итеративный с пересчетом — recalc. Медианное усреднение по 500-м точкам старта

Во всех вариантах лучшие результаты получились при использовании первого порядка аппроксимации. Второй порядок дал худшие результаты. Прогноз при нулевом порядке аппроксимации получился существенно хуже, правда, в прямом варианте только при небольшой длине прогноза.

Таким образом, в первом рассмотренном примере лучшим стал итеративный вариант с пересчетом пер-

вого порядка. В прямом варианте лучшие результаты также были получены при аппроксимации первого порядка, но на достаточном удалении от стартовой точки результат практически не зависит от порядка аппроксимации.

Однако если немного изменить параметры, в первую очередь значение  $\tau$ , и рассмотреть ряд MG с  $N = 10\,000$ ,  $\tau = 1$ ,  $p = 4$  и выбрать количество соседей втрое больше минимального (т. е. взять  $\Xi = 3$  для LA0,  $\Xi = 15$  для LA1 и  $\Xi = 45$  для LA2), результаты будут другими. Они представлены на рис. 8. В этом примере результат итеративного варианта LA снова оказался худшим, но лучшим уже стал прямой вариант LA.

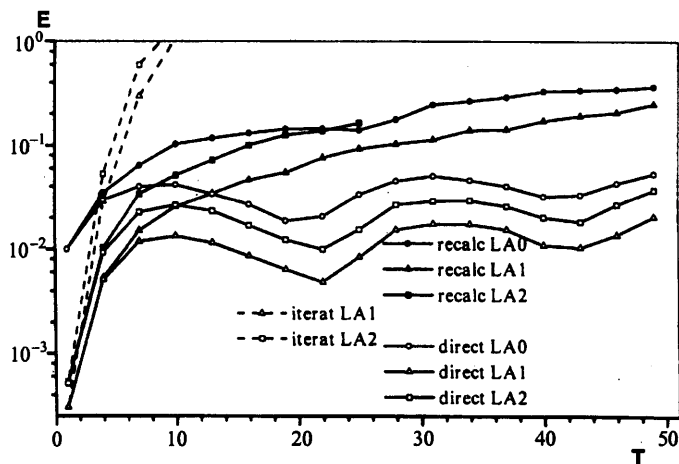


Рис. 8. Зависимость ошибки ( $E$ ) от длины прогноза ( $T$ ) ряда MG ( $\tau = 1$ ). Медианное усреднение по 500-м точкам старта

Обрыв на рис. 8 линии, соответствующей прогнозу по итеративному варианту с пересчетом второго порядка, связан с особенностями численной реализации алгоритмов расчета. В данном случае невозможность дальнейшего построения прогноза была вызвана превышением в ходе расчетов максимально допустимого числового значения, что связано с конечной точностью проводимых расчетов. Это, а также накопление ошибки, характерное для итеративного варианта LA, может приводить к огромным, практически неконтролируемым ошибкам прогноза, как это было в примере на рис. 5.

Из рассмотренных выше примеров следует, что для рядов, ограниченных по количеству исходных данных, в каждом случае лучшим оказался первый порядок аппроксимации. Это связано с небольшой длиной применяемых рядов, поэтому результаты при аппроксимации нулевого порядка оказались хуже, чем в случае линейной аппроксимации. Проявившееся в большинстве случаев превосходство последней над аппроксимацией второго порядка связано с ограниченной точностью расчетов. С ростом порядка аппроксимации ее отрицательное влияние на качество прогноза возрастает. Все сказанное относится в первую очередь к прямому и итеративному с пересчетом вариантам, так как итеративный

вариант ведет к неприемлемой точности прогноза. Итеративный вариант с пересчетом, который дает в среднем результаты, сопоставимые по точности с прямым вариантом, в конкретных задачах прогноза может применяться только как LA0. Это связано с тем, что при использовании его старших порядков за счет погрешностей численных расчетов возможно появление ошибок прогноза, превосходящих (при достаточно большой длине прогноза) средние значения ряда в миллионы раз.

### Заключение

Прогноз по временным рядам является одним из наиболее важных направлений приложения результатов теории динамических систем к решению практических задач различных областей науки. Несмотря на хорошо разработанную к моменту появления этой теории технику прогноза временных рядов на базе линейных параметрических моделей, ее вклад в разработку методов прогнозирования оказался весьма заметным. С ней появились новые подходы, основанные в том числе на принципе локальной аппроксимации. Преимущества локальной аппроксимации проявляются в первую очередь при прогнозировании нерегулярных (хаотических и квазипериодических) стационарных временных рядов.

На сегодняшний день существует целый набор методов, объединенных использованием принципа локальной аппроксимации. Этот принцип заключается в применении моделей аппроксимации, в которых значения параметров меняются от одной локальной подобласти пространства задержек к другой. В остальном, т. е. в конкретном виде используемых моделей, принципах прогнозирования на несколько шагов вперед и применяемых способах численных расчетов, эти методы существенно расходятся. Таким образом, возникает задача систематизации существующих разновидностей LA и выбора из них наиболее оптимальной в каждом конкретном случае. Справиться с ней позволяет предложенная общая математическая модель методов LA. Она также дает возможность выяснить некоторые существенные особенности получаемого решения задачи прогноза. Основной вывод, сделанный с помощью указанной модели: оптимальным по соотношению точности и устойчивости прогноза является прямой вариант LA нулевого порядка. В случае коротких незашумленных рядов более эффективным может оказаться прямой вариант LA1. Но при этом важно учитывать связанные с ним вычислительные сложности.

В дальнейшем предполагается провести аналитическое и практическое сравнение алгоритма и результатов прогноза по принципу LA с другими известными методами прогнозирования временных рядов. В первую очередь с близкими по идеологии, но не являющимися локальными методами типа SSA (Singular Spectrum Analysis) [15, 18]. Кроме того,

первоочередной целью дальнейших исследований является проверка сделанных выводов на реальных примерах, рассмотренных, в частности, в работах [17, 41].

#### Литература

1. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.
2. Николис Г., Пригожин И.Р. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
3. Waldrop M. Complexity: The Emerging Science at the Edge of Chaos. Touchstone Books, 1993.
4. Монин А.С., Пугачев Л.И. Предсказуемость погоды и климата // Пределы предсказуемости / Ред. Ю.А. Кравцов. М.: ЦентрКом, 1997.
5. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974.
6. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
7. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: УРСС, 2000.
8. Johnston J., DiNardo J. Econometric methods. 4<sup>th</sup> Edition. McGraw-Hill, 1997.
9. Franses P.H. Time series models for business and economic forecasting. Cambridge university press, 1998.
10. Brown R.G. Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time-Series. New Jersey, Prentice-Hall, 1962.
11. Shumway R., Stoffer D.S. Time Series Analysis and its Applications. Springer, 2000.
12. Mills T.C. The econometric modeling of financial time series. 2<sup>nd</sup> Edition. Cambridge university press, 1999.
13. Рожков В.А., Трапезников Ю.А. Вероятностные модели океанологических процессов. Л.: Гидрометеоздат, 1990.
14. Takens F. // Lect. Notes in Math, Berlin, Springer. 1981. **898**. P. 336.
15. Vautard R., Yiou P., Ghil M. // Physica D. 1992. **58**. P. 95.
16. Лоскутов А.Ю., Истомин И.А., Котляров О.Л., Кузанын К.М. // Письма в Астрон. журн. 2001. **27**, № 11. С. 867.
17. Ghil M., Allen R.M., Dettinger M.D., et al. // Rev. Geophys., 10.1029/2000GR000092, in press.
18. Главные компоненты временных рядов: метод «Гусеница». Сб. статей / Ред. Д.Л. Данилов и А.А. Жиглявский. СПбГУ, 1997.
19. Broomhead D.S., King G.P. // Physica D. 1986. **20**. P. 217.
20. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: ЮНИТИ, 1998.
21. Golyandina N., Nekrutkin V., Solntsev V. «Caterpillar»-SSA Technique for Analysis of Time Series in Economics, <http://vega.math.spbu.ru/caterpillar>
22. Farmer J.D., Sidorowich J.J. // Phys. Rev. Lett. 1987. **59**. P. 845.
23. Афанасьев В.Н., Юзбашев М.М. Анализ временных рядов и прогнозирование. М.: Финансы и статистика, 2001.
24. Broomhead D.S., Jones R. // Proc. Roy. Soc. London. 1989. **423**. P. 103.
25. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990.
26. Mane R. // Lect. Notes in Math, Berlin, Springer. 1981. **898**. P. 230.
27. Farmer J.D., Sidorowich J.J. Exploiting chaos to predict the future and reduce noise. Evolution, Learning, and Cognition / Ed. Y.C. Lee, Singapore, World Scientific Press, 1988, P. 277.
28. Casdagli M. // Physica D. 1989. **35**. P. 335.
29. Sello St. Time Series Forecasting: A Nonlinear Dynamics Approach. 1999. arXiv:physics/9906035.
30. National Geophysical Data Center's database: [ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/STP/SOLAR\\_DATA/SUNSPOT\\_NUMBERS/SMOOTHED](ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/STP/SOLAR_DATA/SUNSPOT_NUMBERS/SMOOTHED)
31. Abarbanel H.D.I., Brown R., Sidorowich J.J., Tsimring L.S. // Rev. Mod. Phys. 1993. **65**. P. 1331.
32. Davies M.E. // Physica D. 1997. **101**. P. 195.
33. Broomhead D.S., King G.P. // Nonlinear Phenomena and Chaos / Ed. S. Sarkar. Bristol, Adam Hilger, 1986. P. 113.
34. Takens F. // Nonlinear Dynamics Systems and Chaos / Eds. H.W. Broer, S.A. van Gills, I. Hoveijn, F. Takens. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, **19**. Birkhauser, Basel etc., 1996.
35. Grassberger P., Procaccia I. // Phys. Rev. Lett. 1983. **50**. P. 346.
36. Дайлюденко В.Ф., Крот А.М. // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. 1997. **27**, № 3. С. 315.
37. Abarbanel H.D.I., Kennel M.B. // Phys. Rev. E. 1993. **47**. P. 3057.
38. Дубров А.М., Мхитарян В.С., Трошин Л.И. Многомерные статистические методы. М.: Финансы и статистика, 2000.
39. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998.
40. Kugiumtzis D., Lingjærde O.C., Christophersen N. // Physica D. 1998. **112**. P. 344.
41. Loskutov A., Istomin I.A., Kuzanyan K.M., Kotlyarov O.L. // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2001. **4**, No. 1. P. 47.

Поступила в редакцию  
21.10.02