ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.21

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ ФОРМИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

П. В. Голубцов, Д. В. Сизарев, О. В. Старикова

(*кафедра математики*)

E-mail: peter@mathpvg.phys.msu.su

В данной работе изучаются измерительные системы, описываемые интегральным оператором на плоскости, инвариантным относительно группы движений плоскости. Решается задача синтеза оптимальной измерительно-вычислительной системы и показывается, что использование инвариантности позволяет свести задачу на плоскости к одномерному уравнению Фредгольма на отрезке.

Введение

В статье рассматриваются системы формирования изображений на плоскости. Как правило, такие измерительные системы являются инвариантными относительно группы движений плоскости. Исследуется случай непрерывного поля зрения, а именно, изображение предполагается заданным на бесконечной плоскости.

Задача синтеза оптимальной измерительно-вычислительной системы для инвариантной измерительной системы состоит в построении оптимального редукционного отображения из класса отображений с заданным носителем функции рассеяния точки, определяющего алгоритм обработки результатов измерения. Можно ожидать, что при определенных условиях оптимальное редукционное отображение также будет инвариантным [1]. Ограничение классом инвариантных отображений позволяет сузить класс, в котором строится оптимальное редукционное отображение, что упрощает решение задачи.

Настоящая работа развивает подход, рассмотренный в статьях [1–3] для дискретных сканирующих систем, который использует инвариантность преобразователей информации относительно сдвигов, а при определенных условиях относительно поворотов и отражений. При этом чем шире группа преобразований, относительно которых измерительная система является инвариантной, тем уже класс инвариантных редукционных преобразований и тем сильнее упрощается задача редукции. Однако степень инвариантности задачи ограничивается однородностью поля зрения, а именно дискретностью сканирующей системы. Например, преобразователь информации, заданный на гексагональной сетке, обладает симметрией относительно группы поворотов, сдвигов и отражений, переводящих эту сетку в себя, которая в свою очередь определяется симметрией правильного шестиугольника.

В данной работе предпринята попытка развить этот подход для плоскости в непрерывном случае. Это позволяет снять ограничения на группы симметрии и измерительных систем и, таким образом, максимизировать возможную инвариантность [4]. Детальное исследование свойств оптимальных инвариантных оценок в задачах анализа изображений содержатся в статье [5].

Задача ставится следующим образом: сигнал f, описываемый случайной функцией на бесконечной плоскости с известными статистическими свойствами, подается на вход прибора A, описываемого некоторым интегральным преобразованием, инвариантным относительно сдвигов, поворотов и отражений плоскости. Ядро такого интегрального преобразования зависит только от расстояния и определяется некоторой функцией a, заданной на отрезке.

Цель работы — построить ядро редукционного преобразователя R, зависящего только от расстояния, обращающегося в ноль вне заданного радиуса ρ_r и минимизирующего среднюю погрешность оценки сигнала f. Отметим, что, варьируя ρ_r, можно менять соотношение между качеством редукции и вычислительными затратами как на построение оператора R, так и на его «применение». Это отличает подход данной работы и работ [1–4] от классического подхода, где ограничения такого рода на класс редукционных операторов не накладываются [5].

Как показано в настоящей работе, максимально возможное использование инвариантности редукционного отображения позволяет свести задачу редукции для изображений на плоскости к одномерному уравнению Фредгольма первого или второго рода на отрезке $[0, \rho_r]$.

1. Описание измерительных систем формирования изображения на плоскости

Линейная измерительная система, на которую подается сигнал f, описывается оператором A, представляющим собой интегральное преобразование с заданным ядром $a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Ядро a будем называть функцией рассеяния точки оператора A и считать, что a зависит только от разности $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, т. е. $a(\mathbf{x},\mathbf{y}) = a(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. Это означает, что оператор A инвариантен относительно сдвига. Будем также считать, что $a(\mathbf{x}) = 0$, если $|\mathbf{x}| > \rho_a$ и a зависит только от расстояния $(a(\mathbf{x}) = a(|\mathbf{x}|))$, т. е. описывается функцией на отрезке $[0,\rho_a]$. Это, в частности, означает что A инвариантен еще и относительно поворотов и отражений.

Действие оператора A на функцию f описывается следующим образом:

$$(Af)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega_{\mathbf{x}}^{\rho_a}} f(\mathbf{y})\, a(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2. \qquad (1)$$

Здесь $\Omega_{\mathbf{x}}^{\rho_a}$ обозначает круг с центром в точке $\mathbf{x}$ радиуса ρ_a.

Выражение $\int\limits_{\mathbb{R}^2} a(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$ — это свертка двух функций на плоскости. Поэтому обозначим его $(a*f)(\mathbf{x})$. Заметим, что операция свертки коммутативна и ассоциативна.

Подчеркнем, что ниже одна или обе компоненты свертки будут иметь ограниченный носитель. Выше записано равенство $a(\mathbf{x},\mathbf{y}) = a(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = a(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$, однако, строго говоря, a здесь обозначает три различные функции.

Выражение (1) для свертки двух функций на плоскости можно представить в полярных координатах:

$$(Af)(\mathbf{x}) = \int\limits_0^{\rho_a} a(r)\, r\, dr \int\limits_0^{2\pi} f(\mathbf{x}+r\mathbf{e}_\varphi)\, d\varphi, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2,$$

где $\mathbf{e}_\varphi$ — единичный вектор, определяемый углом φ, т. е. его координаты $(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

Пусть заданы два интегральных оператора A и B, которым соответствуют ядра a и b, обращающиеся в ноль вне отрезков $[0,\rho_a]$ и $[0,\rho_b]$ соответственно. Очевидно композиции этих операторов AB будет отвечать свертка $a*b$. Можно показать, что $a*b$ зависит только от расстояния и

$$(a*b)(x) = \int\limits_0^{\rho_a} a(y)y\,dy \int\limits_0^{2\pi} b\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\psi}\right) d\psi,$$
$$x\in[0,\rho_a+\rho_b].$$

Будем считать, что исследуемый сигнал f — это однородная, случайная функция [6], заданная на бесконечной плоскости $\mathbb{R}^2$. Априорная информация о сигнале заключается в математическом ожидании, которое в любой точке является постоянной величиной:

$$\mathsf{E}f(\mathbf{x}) = \mathrm{const} = f_0, \quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$$

и корреляционной функции ϕ.

В силу однородности f, корреляционная функция ϕ также является функцией расстояния между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. Поэтому далее будет использоваться одна из следующих записей: $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \phi(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$.

Утверждение. *Пусть f — однородная случайная функция, со средним f_0 и корреляционной функцией ϕ. Пусть, кроме того, задан некий оператор A с ядром a. A и f — однородные, т. е. $a(\mathbf{x},\mathbf{y}) = a(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$ и $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \phi(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$. Тогда Af — однородная случайная функция со средним $2\pi f_0 \int\limits_0^{\rho_a} a(x)x\,dx$ и корреляционной функцией $a*\phi*a$.*

Следствие. *При условиях утверждения дисперсия $\mathsf{E}[(Af)(\mathbf{x})]^2$ не зависит от $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$:*

$$\mathsf{E}[(Af)(\mathbf{x})]^2 = (a*\phi*a)(\mathbf{x}-\mathbf{x}) = (a*\phi*a)(0).$$

Под измерительной системой, отвечающей схеме измерения сигнала f

$$\xi = Af + \nu, \qquad (2)$$

будем понимать пару $[a,\sigma]$; где a — ядро оператора A, а σ — корреляционная функция случайной величины ν. Здесь ν — случайная однородная функция, заданная на $\mathbb{R}^2$, с нулевым средним и с заданной корреляционной функцией σ. Особый интерес для нас будет представлять случай белого шума, когда корреляционная функция равна δ функции. Считается, что f и ν — независимы.

Заметим, что если $f_0\neq 0$, то обозначая $f' = f - f_0$ и $\xi' = \xi - Af_0$ получим, что схема измерения (2) эквивалентна схеме измерения сигнала f' с нулевым средним:

$$\xi' = Af' + \nu.$$

Поэтому ниже, не ограничивая общности, будем считать, что $\mathsf{E}f = f_0 = 0$.

2. Проблема синтеза оптимальных измерительных систем

Пусть задан некоторый «идеальный» преобразователь информации без шума, описываемый функцией ядром u (оператором U).

Пусть мы располагаем некоторой измерительной системой $[a,\sigma]$. На основании результата измерения ξ для сигнала f требуется получить оценку функции Uf с минимальной погрешностью.

Чтобы воспользоваться результатами измерений преобразователя информации $[a,\sigma]$ необходимо преобразовать их с помощью некоторого оператора R (описываемого ядром r). Тогда мы получим некоторую новую измерительную систему $r\circ[a,\sigma]$. Оператор R будем называть редукционным оператором [7], поскольку он редуцирует измерительную систему $[a,\sigma]$ к новой измерительной системе $r\circ[a,\sigma]$. Задача синтеза оптимального преобразователя информации состоит в таком выборе преобразования r, чтобы качество синтезированного преобразователя информации $r\circ[a,\sigma]$ оказалось наилучшим.

Итак, необходимо построить редукционный оператор R с ядром, зависящим от расстояния, т. е. определенного функцией $r(x)$, $x\in\mathbb{R}$, причем $r(x)$

обращается в ноль вне отрезка $[0,\rho_r]$, такого, что $R\xi$ является наилучшей оценкой для Uf, т. е. минимизирует функционал погрешности:

$$H(r)=\mathsf{E}[R\xi(\mathbf{x})-Uf(\mathbf{x})]^2\sim\min_r\quad\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2. \qquad (3)$$

Используя результат следствия и раскрывая скобки, получим, что выражение (3) можно преобразовать к виду:

$$H(r)=(r*s*r-2r*t+u*\phi*u)(0)\sim\min_r, \qquad (4)$$

где

$$s=a*\phi*a+\sigma=s_1+\sigma,\quad t=a*\phi*u.$$

Теорема. *Пусть A — интегральный оператор, инвариантный относительно сдвигов, поворотов и отражений, a — ядро оператора, f — случайная функция, заданная на $\mathbb{R}^2$ с известными статистическими характеристиками, ν — случайная однородная функция, заданная на $\mathbb{R}^2$, с нулевым средним и с заданной корреляционной функцией σ, тогда решение задачи (4) сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода:*

$$\int\limits_0^{\rho_r}K(x,x')\,r(x')\,dx'=t(x)\quad\forall x\in[0,\rho_r]$$

с ядром

$$K(x,y)=y\int\limits_0^{2\pi}s\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\psi}\right)d\psi$$

$$\forall x,y\in[0,\rho_r].$$

В случае белого шума, т. е. когда корреляционная функция шума $\sigma=c\delta$, решение задачи (4) сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\int\limits_0^{\rho_r}K'(x,x')\,r(x')\,dx'+cr(x)=t(x)\quad\forall x\in[0,\rho_r],$$

где

$$K'(x,y)=y\int\limits_0^{2\pi}(a*\phi*a)\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\psi}\right)d\psi$$

$$\forall x,y\in[0,\rho_r].$$

Заметим, что уравнения Фредгольма 1-го рода, как правило, приводят к некорректным задачам [8, 9]. Однако, несмотря на то, что полученное уравнение может быть некорректным по А. Н. Тихонову, сама задача (3) часто оказывается корректной в смысле определения корректности задачи оптимального оценивания, данного в работе [10].

На рис. 1, 2 приведен результат рассмотренного алгоритма. Кривые описывают функции рассеяния точки (как функции от радиуса) исходной измерительной системы a, редукционного оператора r и синтезированной измерительно-вычислительной системы $r*a$.

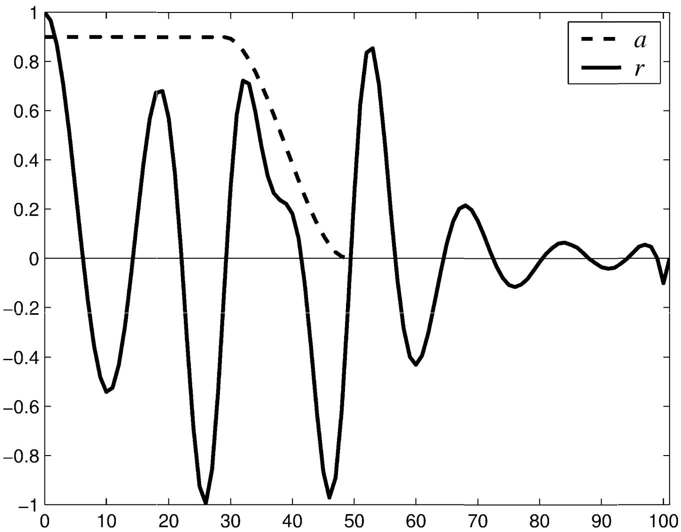

Рис. 1. Функции рассеяния точки исходной измерительной системы a и редукционного оператора r

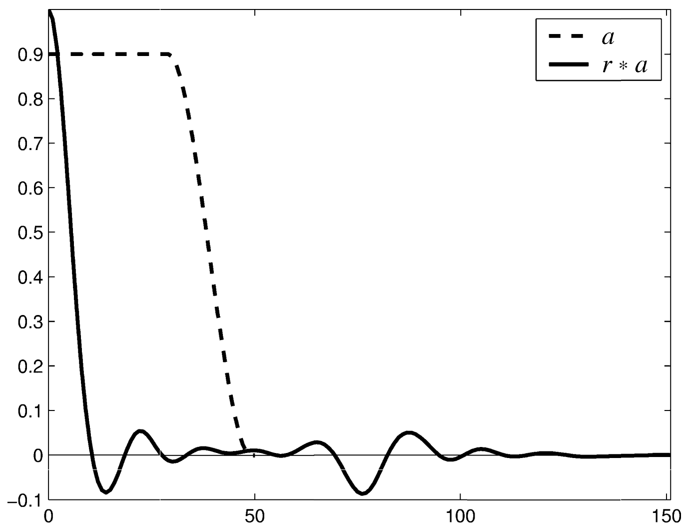

Рис. 2. Функции рассеяния точки исходной измерительной системы a и синтезированной измерительно-вычислительной системы $r*a$

Заключение

Особенностью описанного подхода к решению задач синтеза измерительных систем является значительная экономия вычислительных ресурсов, необходимых для построения редукционного оператора. Задача обработки двумерных изображений на большой (потенциально бесконечной) области сводится к одномерному интегральному уравнению Фредгольма на сравнительно коротком отрезке.

Авторы выражают благодарность Ю. П. Пытьеву за ценные замечания.

Литература

1. *Filatova S.A., Golubtsov P.V.* // Patt. Recogn. and Im. Anal., 1991. **1**, No. 2. P. 224.
2. *Filatova S.A., Golubtsov P.V.* // Artificial Intelligence, Expert Systems and Symbolic Computing, Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), 1992. P. 243.
3. *Filatova S.A., Golubtsov P.V.* // Proceedings of SPIE, V.1960, Automatic Object Recognition III, 1993. P. 483.
4. *Голубцов П.В., Сизарев Д.В.* // Проблемы управления и моделирования в сложных системах. II международная конференция г. Самара: (19–24 июня 2000 г.), С. 149.
5. *Пытьев Ю.П.* // Кибернетика. 1973. № 6. С. 126.
6. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М., 1977.
7. *Пытьев Ю.П.* Математические методы интерпретации эксперимента. М., 1989.
8. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. М., 1989.
9. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М., 1977.
10. *Пытьев Ю. П.* // ЖВМ и МФ. 1976. № 6. С. 1584.

Поступила в редакцию 05.12.01
После переработки 20.11.02

УДК 535.12.01

ГЕНЕРАЦИЯ ТУННЕЛИРУЮЩИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ ЗОММЕРФЕЛЬДА В ЗАДАЧЕ О ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СТЕНКЕ

А. А. Власов

(*кафедра квантовой теории и высоких энергий*)

E-mail: vlasov@srdlan.npi.msu.su

Аналитическими расчетами доказана возможность существования эффекта классического туннелирования для частицы Зоммерфельда, ранее выявленная методами численного счета.

После появления знаменитой работы Дирака о релятивистской силе радиационного трения в классической электродинамике, было опубликовано множество статей и книг, посвященных данной тематике. Среди них отметим работы [1–5], где разбираются основные проблемы, возникающие при использовании уравнения Лоренца–Дирака: необходимость перенормировки и ее неоднозначность, расходящиеся («убегающие») решения и опережающее взаимодействие (заметим, что с аналогичными проблемами можно встретиться и в других классических полевых теориях — теории скалярного поля, гравитационного и т. п.).

Для их решения в начале 19 века были предложены различные модели классических «размазанных» (т. е. с конечными размерами) частиц (под словом частица далее будет подразумеваться чисто классический, а не квантовый, объект — заряженная броуновская частица, заряженная пылинка и т. д.).

Одной из таких моделей является модель Зоммерфельда — жесткая сфера радиуса a, массы m и заряда Q (частица Зоммерфельда) [6].

В так называемом квазистационарном нерелятивистском приближении уравнение движения протяженной частицы Зоммерфельда принимает вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \eta\left[\mathbf{v}(t-2a/c) - \mathbf{v}(t)\right], \tag{1}$$

где a — радиус сферы, $\eta = \frac{Q^2}{3ca^2}$, $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt$, $\mathbf{R}$ — координата ее центра, $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ — внешняя сила.

Было показано, что уравнение (1) не приводит к проблемам, свойственным уравнению Лоренца–Дирака [1–5].

В работах [7, 8] методами численного счета были исследованы новые приложения модели Зоммерфельда: классическое туннелирование, циклотронное движение и др.

Однако существует задача, в которой результат получается аналитически. Это — задача о туннелировании сквозь специальным образом выбранную потенциальную ступеньку.

Пусть частица Зоммерфельда движется в электростатическом поле $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$, задаваемом потенциалом ϕ в виде ступеньки высоты B и ширины S:

$$\begin{aligned} &\phi = B[\theta(z) - \theta(z-S)], \\ &E_z = -\frac{d\phi}{dz} = -B\delta(z) + B\delta(z-S). \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда сила, действующая на частицу Зоммерфельда, вычисляется так:

$$\begin{aligned} F_{\text{ext}} &= \int d\mathbf{r}\,\rho E_z = \\ &= \frac{QB}{4\pi a^2}\int d\mathbf{r}\,\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{R}|-a)[-\delta(z)+\delta(z-S)]. \end{aligned}$$

С новыми переменными $\mathbf{r} \equiv \boldsymbol{\xi} + \mathbf{R}$, $d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\xi} = \xi^2 d\xi \sin\theta d\theta d\phi$, полагая $\cos\theta \equiv \mu$ откуда следует $z = R + \xi\mu$, интегрируя по ϕ и снимая